В. И. Лупандин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГИИ

Учебное пособие



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

В. И. Лупандин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГИИ

Издание четвертое, переработанное

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению 030300 «Психология», специальности 030301 «Психология»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2009

ББК Ю9с
Л85

Рецензенты:
кафедра информатики и математики Уральской академии государственной службы (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор С. Ю. Шашкин);
В. П. Прядеин, доктор психологических наук, профессор (Уральский государственный педагогический университет)

Лупандин В. И.
Л85 Математические методы в психологии : учеб. пособие. 4-е изд., перераб. / В. И. Лупандин. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2009. — 196 с.

ISBN 978-5-7996-0481-3

Учебное пособие предназначено для студентов психологических факультетов университетов, а также для психологов-практиков, имеющих дело со сбором и статистической обработкой материала, его количественным анализом и конструированием различных математических моделей психических явлений, процессов, состояний.

ББК Ю9с

ISBN 978-5-7996-0481-3

ОТ АВТОРА

Любой современный психолог независимо от того, является ли он психологом-практиком или занимается теоретическими изысканиями, должен в совершенстве владеть математическими методами и приемами. Эти методы необходимы, во-первых, для адекватного планирования эксперимента и прогнозирования ожидаемых результатов, во-вторых, для статистической обработки результатов психологического исследования, наконец, в-третьих, для разработки и построения математических моделей, касающихся различных психических явлений, процессов и состояний.

Как известно, основным методом психологического исследования (если не брать во внимание чисто экспериментальные области психологии) традиционно является метод наблюдения. Несмотря на некоторые положительные стороны этого метода, наблюдение всегда является в значительной степени субъективным. Интерпретация полученных данных, как правило, несет на себе отпечаток личности психолога, его опыта, интуиции и т. д. В то же время во многих случаях возникает проблема стандартизации результатов исследования и их более или менее однозначной трактовки. В этом смысле математика представляет собой универсальный, предельно формализованный язык, однозначно описывающий различные свойства, признаки, изменения и пр., в том числе и результаты психологического исследования.

В свое время великий Ньютон вслед за Галилеем провозгласил, что «природа говорит с человеком на языке математики». Более развернуто эту мысль в начале XIX в. выразил немецкий философ и психолог Гербарт, который писал так: «Всякая теория, которая желает быть согласованной с опытом, прежде всего должна быть

продолжена до тех пор, пока не примет количественных определений, которые являются в опыте или лежат в его основании. Не достигнув этого пункта, она висит в воздухе, подвергаясь всякому ветру сомнения и будучи не способной вступить в связь с другими, уже окрепшими воззрениями».

Предлагаемое учебное пособие ставит своей задачей помочь психологу овладеть начальными знаниями, необходимыми для применения математических методов в психологии. При этом автор попытался свести к минимуму освещение теоретических вопросов, которые подробно излагаются в соответствующих учебниках по теории вероятностей и математической статистике. Цель пособия — дать психологу рабочий инструмент для решения конкретных научно-исследовательских и прикладных задач. Несмотря на то, что книга написана, как надеется автор, достаточно простым языком, знакомство с ней подразумевает определенный уровень знаний в области теории вероятностей и математической статистики.

Большинство глав учебного пособия сопровождаются задачами по рассматриваемой теме. Автор выражает искреннюю благодарность своему глубокоуважаемому коллеге Алексею Васильевичу Зайцеву за помощь в разработке ряда задач. В конце книги приводится минимум справочных статистических таблиц, необходимых для математической интерпретации и адекватных выводов по каждой из рассматриваемых задач.

Автор будет весьма признателен за критические замечания, советы и пожелания, которые, несомненно, помогут в дальнейшей работе над книгой.

РАЗДЕЛ 1
ПРОБЛЕМА ИЗМЕРЕНИЯ В ПСИХОЛОГИИ

Начальным этапом математической обработки результатов любого исследования, в том числе и психологического, является *измерение*. Другими словами, изучаемый признак (свойство, черта, характеристика) должен быть измерен, т. е. выражен в той или иной количественной (численной) форме. Численное выражение признака может быть различным — от представления его в бинарной системе (1 — наличие признака, 0 — отсутствие признака) до весьма точных количественных значений (например, максимальная амплитуда альфа-ритма электроэнцефалограммы для данного испытуемого составляет 95 микровольт).

Одной из достаточно сложных задач в психологии является задача математической формализации выраженности исследуемого признака, т. е. перевода его в количественное выражение. Об этом пойдет речь далее в соответствующих главах. В данной же главе мы попытаемся дать общие сведения об измерении вообще и об особенностях измерения психологических свойств (признаков, черт, характеристик) в частности.

1.1. Понятие об измерении

Существует целый ряд определений термина *измерение*. Так, измерение иногда трактуют как познавательный процесс, включающий исследование количественных характеристик материальных

объектов с помощью соответствующих измерительных приборов. Такая формулировка вполне подходит для физического измерения, но не всегда годится для измерения психологических величин. Чаще всего процедуры психологического измерения подразумевают наличие не измерительных приборов, а совокупности заданий, вопросов, утверждений и т. д. Тем не менее в некоторых областях психологической науки (психофизика, психофизиология и др.) предусматривается использование и приборных (аппаратурных) методов измерения.

Другое определение термина: измерение есть присваивание чисел определенным объектам, свойствам, признакам, событиям или изменениям в соответствии с определенными правилами. Это определение больше подходит к измерению в психологии, хотя справедливости ради необходимо отметить, что не все психологические величины можно выразить числом — некоторые из них выражаются качественными определениями, названиями, символами и пр.

Наконец, измерение можно определить как построение шкал посредством изоморфного отражения эмпирической системы с отношениями в численной системе с отношениями. Другими словами, это определение фактически ставит знак равенства между измерением и шкалированием. В первом приближении это так, хотя в некоторых случаях понятие *шкалирование* шире понятия *измерение* и включает в себя упорядочение не только численных (количественных), но и качественных характеристик.

Любой вид измерения предполагает наличие вполне определенных единиц измерения. Единица измерения — это та «измерительная палочка» (по выражению С. Стивенса), которая является своеобразным эталоном для осуществления тех или иных измерительных операций. В физике и других естественно-научных дисциплинах используют основные и производные единицы измерения. Основных единиц измерения относительно немного: в Международной системе единиц (СИ) это килограмм (кг) — единица массы, метр (м) — единица расстояния, секунда (с) — единица времени, градус Кельвина (К) — единица температуры, ампер (А) — единица силы тока, кандела (кд) — единица силы света и моль — единица количества вещества. Все остальные единицы (скорость,

плотность, освещенность, давление и др.) являются производными и выводятся из основных единиц измерения.

Кроме общепринятых (международных) единиц измерения, иногда применяются и традиционные (национальные) единицы (фунты, унции, дюймы, ярды, футы и пр.), использование которых в научных исследованиях весьма ограниченно.

Наряду с десятичной системой счисления, которая является наиболее распространенной, некоторые единицы вычисляются в шестидесятиричной системе, ведущей свое начало из Ассирии и Вавилона. В этой системе вычисляются интервалы времени (часы, минуты), а также угловые меры (угловые градусы, минуты и секунды). Несмотря на некоторые неудобства, возникающие при переводе единиц измерения из шестидесятиричной системы в десятичную, вавилонско-ассирийская система настолько прочно вошла в наше сознание, что менять ее сегодня, по-видимому, не имеет смысла.

Физические единицы измерения используются в психологических исследованиях далеко не всегда. В ряде случаев, например в психофизике, представляется разумным, чтобы субъект оценивал какие-либо величины или находил степень различия между ними в общепринятых единицах (например, промежутки времени — в минутах и секундах, длину линий — в сантиметрах, расстояние до объекта — в метрах и т. д.). Общепринятые единицы измерения используются и в психофизиологии. Так, время сенсомоторных реакций и время опознания образов принято измерять в секундах или миллисекундах, амплитуду вызванных потенциалов — в микровольтах, частоту ритмов электроэнцефалограммы выражают числом колебаний в секунду и т. д. Тем не менее чаще всего психологи в своих измерениях пользуются условными единицами («сырыми» баллами, стенами и т. д.). Так, при использовании большинства тестов-опросников в качестве единицы измерения выступают ответы «да» или «нет». Исследуемое же свойство вычисляется на основе соотношения этих ответов (их суммы, разности и т. п.). При выполнении «интеллектуальных» тестов в качестве единицы измерения выступает решение каждой отдельной задачи (выполнение отдельного задания), а исследуемый признак (коэффициент интеллекта и пр.) определяется по числу выполненных заданий.

1.2. Особенности измерения в психологии

Впервые в более или менее современном виде мысль о принципиальной возможности измерения психических явлений, процессов и состояний высказал известный немецкий философ *Густав Теодор Фехнер* (1801—1887). В своем фундаментальном труде «Элементы психофизики» он писал так: «...трудно возразить против того, что духовное вообще подчинено количественным отношениям. Ведь можно говорить не только о большей или меньшей силе ощущения, но и о разной силе влечений, о том, что существует большая или меньшая степень внимания, живости воспоминаний или образов фантазии, ясности сознания в целом, а также интенсивности отдельных мыслей... Таким образом, высшее духовное не в меньшей степени, чем чувственное... может быть охарактеризовано количественно».

Несмотря на длительную полемику по поводу возможности количественного описания психических явлений, процессов и состояний, которая развернулась после выхода в свет книги Фехнера, на сегодняшний день трудно представить психологическую науку без измерения. Психофизика, психофизиология, психометрика, психодиагностика — вот далеко не полный перечень психологических дисциплин, в которых измерение является необходимейшим инструментом.

Иногда говорят, что измерение психических величин, зачастую основанное на субъективных отчетах испытуемых, не внушает доверия только потому, что оно субъективно. Не вдаваясь в философскую сторону проблемы, можно сказать, что психологические измерения так же надежны и валидны, как и измерения физические, но обладают своими особенностями. Основные свойства психологического измерения — это его многофакторность и вариативность.

Многофакторность измерения в психологии состоит в том, что на психологические величины оказывает влияние множество различных факторов, одни из которых (релевантные) непосредственно связаны с измеряемым признаком, другие (иррелевантные) не связаны с ним или связаны косвенно. Влияние всех иррелевантных факторов учесть невозможно. Однако чем большее их число будет учтено, тем более действенна данная методика, более валидна та или

иная математическая модель, более точен тот или иной психологический прогноз.

Существует наиболее оптимальный, на наш взгляд, способ преодоления трудностей, связанных с многофакторностью психологических измерений. Так, если на измеряемый психологический признак оказывает действие большое число разнообразных факторов, то априорно принимается точка зрения, что все эти многообразные и разнонаправленные факторы в конечном счете уравновешивают друг друга и исследуемый признак варьирует *случайным образом*. Известно, что на принципе случайности основана целая область математической науки — теория вероятностей. Поэтому неудивительно, что многие из математических методов, используемых в психологии, основаны именно на вероятностной теории. Кроме того, существуют специальные методы и приемы, позволяющие определить, изменяется ли исследуемый признак случайным образом или неслучайно. Если психологическое свойство (признак) — случайная величина, то к нему применимы основные статистические критерии; если признак изменяется неслучайно, следует выявить и по возможности устранить (или минимизировать) тот фактор, который вносит систематическую ошибку. Если же это не представляется возможным, следует использовать так называемые *непараметрические методы* статистической обработки полученных результатов.

***Вариабельность* (*вариативность*)** психологических измерений состоит в том, что психологические величины (признаки, переменные) зачастую принимают значения, весьма отличающиеся друг от друга. Поэтому, наряду с мерами центральной тенденции (мода, медиана, среднее значение), в психологии всегда приходится учитывать и вариабельность (изменчивость) измеряемого признака. Доказано, что вариабельность переменных сама по себе является весьма информативным показателем. Разработано большое количество статистических методов, основанных именно на анализе вариабельности, — дисперсионный, корреляционный, факторный анализ и др. Другими словами, вариабельность психологических признаков из противника превратилась в союзника, и на ее основе представилось возможным решать достаточно сложные статистические задачи.

В различных областях и разделах психологии измерение имеет свою специфику. Так, психофизические измерения предусматривают, как правило, использование двух шкал: первая — это шкала физических единиц (сила света, звука, пространственные, временные параметры сигнала и т. д.), вторая — субъективная (шкала суждений, оценок и пр.), которая может быть выражена в терминах номинальной, порядковой, интервальной шкалы или шкалы отношений (см. подразд. 1.3). В случаях неметрического шкалирования исследователь, как правило, оперирует только субъективными шкалами.

Двойственная метрика предполагается и в психофизиологических исследованиях. Физиологические процессы в организме человека измеряются специальными приборами и выражаются в общепринятых физических единицах — секундах, герцах, микро- и милливольтах и т. д. В то же время психические процессы, сопутствующие физиологическим изменениям в организме, измеряются в терминах субъективного самоотчета испытуемых.

Особое место измерения занимают в психодиагностике, поскольку они включают в себя, с одной стороны, систему субъективных отчетов или невербальных операций субъекта, с другой — систему условных приемов и методов оценки психологических показателей.

В заключение следует еще раз подчеркнуть, что, несмотря на вариативность и многофакторность психологических величин, измерение в психологии является неотъемлемым этапом исследования, позволяющим с определенной степенью точности и надежности описывать разнообразные психические явления, процессы и состояния.

1.3. Шкалы измерений

Шкала в широком понимании этого слова представляет собой упорядоченную совокупность данных. Другими словами, если в психологическом эксперименте (наблюдении, опросе и т. д.) мы

получаем какие-либо результаты (данные) и определенным образом упорядочиваем их, то мы конструируем шкалу.

В самом общем смысле различают четыре типа шкал измерений: номинальную, порядковую, интервальную и шкалу отношений.

Номинальная (номинативная) шкала, или ***шкала наименований***, состоит в присваивании какому-либо свойству или признаку определенного обозначения или символа (численного, буквенного и др.). По сути, это — классификация свойств, группирование объектов, объединение их в классы при условии, что объекты, принадлежащие к одному классу, идентичны (аналогичны) или, по меньшей мере, сходны друг с другом в отношении какого-либо признака или свойства, тогда как объекты, различающиеся по этому признаку, попадают в разные классы.

Примеры:

1) классификация вкусовых качеств:
A — сладкое, B — горькое, C — кислое, D — соленое;

2) цвета видимого спектра: A — красный, B — зеленый, C — синий и пр.;

3) распределение людей по типам темперамента:
A — холерики, B — сангвиники, C — флегматики, D — меланхолики.

Независимо от характера обозначения групп, классов (буквенные или численные), номинальная шкала определяет, что разные классы отличаются друг от друга лишь в качественном отношении, но не подразумевает каких-либо количественных операций с ними. Так, исходя из приведенных выше примеров, нельзя сказать, что $A > B$ или $B < C$, можно лишь утверждать, что A нетождественно B, B отличается от C и т. д.

Номинальная шкала допускает любые замены и перестановки буквенных (численных) обозначений.

Частным случаем номинальной шкалы является ***дихотомическая шкала наименований***, когда свойство или признак может принимать только два значения, например:

A (1): мужчина	верующий	успевающий	демократ
B (0): женщина	атеист	неуспевающий	коммунист

Допустимая статистика: число случаев, мода, корреляция случайных событий, коэффициент φ и др.

Ординарная (порядковая, ранговая) шкала предполагает ранжирование определенного признака или свойства так, что $A > B > C > ...$ (или наоборот). Порядковое измерение возможно тогда, когда в объектах можно обнаружить различия в степени выраженности признака или свойства. Шкала порядка не предусматривает меры (степени) различий между элементами ряда. Другими словами, мы можем констатировать, что объект (признак, свойство) A имеет преимущество над B, C — над D и т. д., но не можем сказать, в каком случае это преимущество выражено в большей или меньшей степени. Ранговая шкала задает лишь порядок следования объектов в соответствии со степенью выраженности того или иного признака.

Примеры:

1) места, занятые студентами (школьниками) в соревновании (олимпиаде и пр.);

2) ранг (место) студента по среднему баллу успеваемости;

3) в психодиагностике (например, тест Спилбергера):
утверждение: «Я спокоен, собран, хладнокровен»;
оценка: 1 (никогда) 2 (иногда) 3 (часто) 4 (всегда).

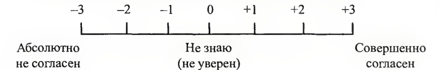
Допустимая операция — реверсия шкалы. В случае количественных обозначений не допускается никаких перестановок внутри ранжированного ряда. Допустимая статистика: медиана, проценты, ранговая корреляция по Спирмену, Кендаллу и т. д.

Интервальная шкала (шкала интервалов) предполагает разбиение диапазона (расстояния) между двумя крайними (реперными) точками на определенное число равных интервалов (градаций, категорий).

Примеры:

а) температурная шкала Цельсия;

б) шкала уровня субъективного контроля по Роттеру:



На интервальной шкале нет естественной точки отсчета: нуль условен, он не указывает на отсутствие измеряемого свойства. Шкала допускает операции нахождения разности, суммы и среднего значения и не изменяется при преобразовании $x \rightarrow x + a$ (сложение или вычитание). Эти свойства шкалы позволяют количественно сравнивать между собой различия между парами признаков, например: $A - B > C - D$. Тем не менее шкала не допускает нахождение отношений величин признака (т. е. *во сколько раз* одна величина больше или меньше другой). Это можно проиллюстрировать следующим примером. Допустим, вчера температура воздуха была +5°, а сегодня +10° по шкале Цельсия. Мы можем констатировать, что сегодня на 5 градусов теплее, чем вчера, но вряд ли можем сказать, что сегодня потеплело в два раза (если выразить те же температуры, например, в градусах Фаренгейта, то мы получим соответственно +41° и +50°).

Необходимо отметить, что подавляющее большинство шкал, рассматриваемых в психодиагностике, являются порядковыми или интервальными шкалами.

Шкала отношений предполагает наличие естественного нуля, который означает полное отсутствие какого-либо свойства или признака. Шкала отношений является наиболее информативной шкалой, допускает любые математические операции и использование различных статистических приемов. Шкала не изменяется при преобразовании $x \rightarrow bx$. Это означает, в частности, что отношение двух величин не зависит от выбора единиц измерения. Если, например, мы имеем два груза с массой соответственно m_1 и m_2 и обнаруживаем, что $m_1 : m_2 = 1 : 2$, то отношение не изменится, если измерить массу этих грузов в граммах, фунтах, унциях или любых других единицах. В то же время для шкал отношений неправомерна операция $x \rightarrow x + a$, т. е. не допускается никакого линейного сдвига относительно нулевой точки. Так, если $100 : 200 = 1 : 2$, то $(100 + 10) : (200 + 10) \neq 1 : 2$.

Большинство измерительных шкал физических характеристик (пространство, время, масса, объем, скорость и пр.), используемых, в частности, в психофизике, являются шкалами отношений. Шка-

лы отношений используются и в психофизиологии, где отсчет различных физиологических характеристик также ведется от естественного нуля.

Оперирование различными математическими методами предполагает изначальное определение типа шкалы исследуемого признака. Если тип шкалы определен неверно, то исследователь может выбрать неадекватный метод статистической обработки и прийти в результате к неверным выводам. Более подробно об этом будет сказано в соответствующих разделах.

РАЗДЕЛ 2
ОСНОВНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

2.1. Генеральная и выборочная совокупности

Генеральная совокупность представляет собой массив данных одной категории. Так, если мы ставим перед собой задачу исследовать коэффициент интеллекта (IQ) школьников выпускных классов школ г. Екатеринбурга, то генеральной совокупностью будут являться все школьники всех выпускных классов всех школ города. Объем генеральной совокупности определяется задачами исследования. Обычно генеральная совокупность включает в себя очень большое число субъектов (испытуемых) — студентов вузов, школьников, работников промышленных предприятий, военнослужащих, пенсионеров и др. Сплошное исследование генеральных совокупностей чрезвычайно затруднительно, а зачастую и невозможно — для этого понадобилась бы целая армия психологов. Поэтому, как правило, изучается часть генеральной совокупности, называемая *выборочной совокупностью*, или *выборкой*.

Выборка (выборочная совокупность) — это такая группа объектов, которая должна удовлетворять следующим условиям:

1. Это группа объектов, доступная для изучения. Объем выборки определяется задачами и возможностями наблюдения и эксперимента.

2. Это часть заранее намеченной генеральной совокупности.

3. Это группа, отобранная случайным образом так, чтобы любой объект генеральной совокупности имел одинаковую вероятность попасть в выборку.

Основное свойство выборочной совокупности — *репрезентативность*. Репрезентативность — это способность выборки характеризовать соответствующую генеральную совокупность с определенной точностью и достаточной надежностью.

Ошибки репрезентативности могут возникать в двух случаях:

1. Если выборка, характеризующая генеральную совокупность, мала. Так, если мы провели исследования на группе, состоящей из 10 школьников 11-го класса какой-либо школы города, то вряд ли мы имеем право экстраполировать полученные нами данные на всю генеральную совокупность.

2. Свойства (параметры) выборки не совпадают с параметрами генеральной совокупности. Такое явление может наблюдаться в тех случаях, когда нарушается принцип случайности при отборе испытуемых.

2.2. Переменная величина

Переменная величина (или просто ***переменная***) — количественно измеряемое свойство или признак, принимающие различные значения. В качестве переменных могут выступать различные психические признаки — время решения задачи, количество допущенных ошибок, уровень тревожности или нейротизма, коэффициент интеллекта и многое другое. Значения переменных могут изменяться либо непрерывно, либо дискретно. Так, в большинстве психофизиологических исследований измеряемые величины, в принципе, непрерывны, и точность их измерения зависит от точности измерительного устройства (прибора). Дискретные значения переменных встречаются в большинстве психодиагностических процедур, где измеряемый параметр чаще всего принимает целочисленные значения — количество положительных и отрицательных ответов, число правильно решенных задач (выполненных заданий) и т. д.

Принято считать, что психологические переменные являются случайными величинами, так как они испытывают на себе влияние

многочисленных и разнообразных факторов (см. подразд. 1.2) и невозможно предсказать заранее, какое значение они примут.

Математическая обработка — это оперирование со значениями признака (переменной), полученными у испытуемых в процессе психологического исследования. Методы математической обработки весьма разнообразны. Это может быть построение распределения частот измеряемого признака, вычисление мер центральной тенденции, мер изменчивости (вариабельности) признака, определение характера связи между разными переменными, установление формы зависимости одного признака от другого, влияние тех или иных факторов на величину признака и многое другое.

Поскольку большинство изучаемых в психологии переменных не являются жестко детерминированными величинами, то большинство математических методов основаны на постулатах теории вероятностей. Это касается и выводов, которые делает исследователь в результате математической обработки полученных данных. Любой вывод или прогноз может быть сделан лишь с определенной вероятностью ($P = 0 \div 1$). Для характеристики этой вероятности используется понятие уровней значимости.

2.3. Уровни значимости

Уровень значимости (или, иначе, ***порог достоверности***, β) является показателем вероятности безошибочных выводов и прогнозов. Чаще всего в статистике используются четыре стандартных уровня значимости — нулевой ($\beta_0 = 0{,}90$), первый ($\beta_1 = 0{,}95$), второй ($\beta_2 = 0{,}99$) и третий ($\beta_3 = 0{,}999$). Другими словами, если исследователь задает нулевой уровень значимости, то его выводы и прогнозы справедливы в 90 % случаев (вероятность равна 0,90), если первый уровень — в 95 % случаев и т. д. Большинство существующих статистических таблиц основаны именно на этих «стандартных» уровнях, хотя с помощью современной компьютерной техники можно решать и обратную задачу — по результатам исследования определять тот уровень значимости, на котором можно сделать безошибочный вывод (например, $\beta = 0{,}978$).

Следует отметить, что в психологических исследованиях уровень значимости 0,95, как правило, вполне достаточен для формулировки тех или иных выводов и прогнозов. Более высокие уровни (β_2 и β_3) в ряде психологических исследований почти недостижимы и используются тогда, когда к исследованию предъявляются повышенные требования (работа по важному социальному заказу и пр.).

Необходимо иметь в виду, что работа на каждом уровне значимости предполагает минимальный объем выборочной совокупности, на которой проводится исследование. Так, если объем выборки (n) — от 20 до 30 испытуемых, мы имеем право использовать только нулевой уровень значимости (β_0), при $n \geq 30$ — нулевой и первый уровень, при $n \geq 100$ — уровни β_0, β_1 и β_2, и, наконец, при $n \geq 200$ — все четыре уровня (β_0, β_1, β_2 и β_3). При малочисленных выборках ($n < 20$) предпочтительнее пользоваться методами непараметрической статистики, поскольку определить характер распределения исследуемого признака на такой выборке не представляется возможным.

Некоторые исследователи в качестве уровня значимости используют величину α (или p), равную $1 - \beta$. В этом случае уровни значимости приобретают следующий вид: $\alpha_0 \leq 0{,}10$; $\alpha_1 \leq 0{,}05$; $\alpha_2 \leq 0{,}01$ и $\alpha_3 \leq 0{,}001$. Логический смысл этих величин состоит в том, что они характеризуют вероятность случайности (вероятность ошибочных прогнозов). Другими словами, это та вероятность, которая приходится на долю случайных (как правило, непредсказуемых) факторов.

Какой именно критерий (α или β) использовать при статистической обработке — дело самого исследователя, поскольку принципиального значения это не имеет.

2.4. Достоверность результатов исследования

О ***статистической достоверности*** (***статистической значимости***) результатов психологического исследования можно говорить в тех случаях, когда статистический критерий (мера раз-

личий, связи, зависимости, влияния и т. д.) превышает стандартное (критическое) табличное значение для данного уровня значимости. Так, например, для сравнения между собой двух независимых выборок по критерию Стьюдента (см. подразд. 7.4) стандартное значение, определяемое по соответствующей таблице ($t_{кр}$), равно 2,57. В то же время значение критерия Стьюдента, вычисленное по экспериментальным данным ($t_э$), составляет 2,63. В данном случае $t_э > t_{кр}$, и различия между двумя выборками считаются статистически достоверными (статистически значимыми). Если же $t_э < t_{кр}$ (например, $t_э = 2{,}54$), то различия называются недостоверными (они могут возникнуть в результате случайных вариаций признака). При равенстве показателей ($t_э = t_{кр}$) достоверность различий подвергается сомнению (иногда говорят, что различия лежат на границе достоверности).

Аналогичные выкладки справедливы и в других случаях, когда определяется достоверность связи (корреляции) между переменными (см. разд. 8) или значимости влияния того или иного фактора (разд. 10). Исключение составляют некоторые непараметрические критерии, например, критерий Манна — Уитни или критерий Вилкоксона, где степень различий или влияния считается статистически значимой, когда эмпирически полученное значение критерия меньше критического (табличного).

Особое место занимают меры соответствия экспериментального распределения теоретическому. В этом случае соответствие считается статистически значимым, если величина критерия, вычисленная по экспериментальным данным (например, критерия χ^2, см. подразд. 6.1.4), меньше табличной для данного уровня значимости. Все эти нюансы будут детально рассмотрены в соответствующих разделах.

В заключение следует отметить, что любые выводы, заключения и прогнозы должны основываться только на статистически достоверных результатах.

РАЗДЕЛ 3
ПОДГОТОВКА ДАННЫХ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ

Прежде чем приступать к математической обработке результатов психологического исследования, экспериментальный материал необходимо соответствующим образом подготовить. При этом психологу следует соблюдать два непременных условия. Во-первых, данные должны быть представлены в наиболее компактной, удобной для обработки форме. Во-вторых, при упорядочении данных должен быть сохранен максимум содержащейся в них информации.

Подготовка данных к математической обработке включает в себя ряд последовательных этапов: протоколирование, табулирование данных, создание таблиц сгруппированных частот, построение диаграмм или полигона распределения частот и т. д. Рассмотрим все этапы более подробно.

3.1. Протоколирование данных

Если психолог имеет под рукой персональный компьютер, задача протоколирования значительно упрощается. Любой программист может составить соответствующую базу данных, и все необходимые сведения о каждом испытуемом можно заносить в компьютер. Несомненное удобство компьютерного варианта состоит в том, что в любой момент можно извлекать информацию об интересующем

нас контингенте испытуемых — по полу, возрасту, социальной принадлежности и др. При отсутствии такой возможности на каждого испытуемого составляется отдельный протокол.

В протоколе необходимо отмечать фамилию и инициалы испытуемого, пол и возраст (за исключением случаев анонимного обследования, когда указываются только инициалы, пол и возраст). Несоблюдение этих требований делает невозможным дальнейший анализ результатов (в тех случаях, когда нас интересует связь исследуемой переменной с возрастом и полом испытуемых).

Весьма желательно указывать в протоколе дату исследования. Это особенно важно в тех случаях, когда исследование одной и той же выборки проводится повторно (период времени между повторными исследованиями, например две недели или полгода, имеет большое значение, особенно когда речь идет о детях).

В некоторых случаях необходимо указывать время суток, когда проводилось исследование. Так, некоторые психологические и психофизиологические переменные (время сенсомоторной реакции, концентрация и переключаемость внимания, объем оперативной памяти и др.) в значительной мере зависят от уровня активности субъекта, степени его утомления, которые далеко не одинаковы в разное время суток.

При необходимости в протоколе следует отмечать условия опыта (проводилось ли исследование индивидуально или в группе, наличие внешних помех и т. д.). Все другие данные о каждом или отдельных испытуемых исследователь отмечает по своему усмотрению, т. е. фиксируется то, что психолог считает наиболее важным.

3.2. Составление сводных таблиц (табулирование данных)

Использование индивидуальных протоколов для математической обработки результатов не очень удобно. Для того чтобы представить материал в более компактном виде, данные сводятся в итоговую таблицу следующего вида:

№ п/п	Фамилия, имя, отчество	Другие данные (если необходимо)	Исследуемый показатель
1			
2			
3			
…			
n			

В ряде случаев перед составлением сводной таблицы проводится *ранжирование данных*. Оно, в частности, необходимо при определении квантилей (см. подразд. 3.3). Для этого данные выстраиваются в общий ряд по исследуемому признаку в порядке его возрастания (или убывания) следующим образом: $x_1 \le x_2 \le x_3 \le ... \le x_n$ (или наоборот), где n — общее число значений признака (объем выборки). Знак «меньше или равно» предполагает, что у разных испытуемых могут встречаться одинаковые значения переменной.

Иногда даже итоговые таблицы могут оказаться довольно громоздкими и не вполне удобными для дальнейшей обработки. В этом случае материал можно сделать еще более компактным, составляя частотные таблицы (*таблицы распределения частот исследуемого признака*):

№ п/п	1	2	3	4	...	$n-1$	n
x_i							
f_i							

В первой строке дается номер значения переменной в ранжированном ряду, во второй — конкретное значение (величина признака) и в третьей — частота встречаемости признака (число одинаковых значений признака в выборке).

Для того чтобы полученные данные представить в еще более компактном виде, используются таблицы *распределения сгруппированных частот*. Для составления такой таблицы необходимо:

1) разделить общий диапазон изменения признака на ряд поддиапазонов (классов) при условии, что ширина всех классов должна быть одинакова;

2) определить границы классов и их число в общем диапазоне;

3) подсчитать частоты встречаемости признака в каждом классе.

Обычно для построения распределения сгруппированных частот используется 7—15 классов. Для наиболее точного разбиения диапазона на классы (если в дальнейшем предполагаются математические операции с этими классами) можно использовать формулу Стэрджесса: $N = 1 + 3{,}322 \lg \boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n}$ — объем выборки (количество значений признака), а N — количество классов. Так, например, если $\boldsymbol{n} = 100$, то $N = 1 + 3{,}322 \cdot 2 \approx 8$.

Пример

На выборке испытуемых численностью 100 человек определялся коэффициент интеллекта (IQ). Минимальное значение IQ оказалось равным 72, а максимальное — 134. Для составления таблицы сгруппированных частот используем 8 классов (в соответствии с формулой Стэрджесса). Определяем общий диапазон изменения признака — он будет соответствовать разнице между минимальным и максимальным значениями: 134 – 72 = 62. Следовательно, в каждый класс должно попадать по 8 значений признака (при разбиении на классы можно слегка расширить диапазон с тем расчетом, чтобы в каждом классе оказалось одинаковое число значений и чтобы крайние значения не оказались за пределами диапазона). В соответствии с этим определяем границы классов и составляем таблицу сгруппированных частот:

Номер класса (N)	1	2	3	...	8
Границы класса ($x_{\min} \div x_{\max}$)	72 ÷ 79	80 ÷ 87	88 ÷ 95	...	128 ÷ 135
Среднее значение ($\bar{x}$)	75,5	83,5	91,5	...	131,5
Частоты (f_i)	1	7	32	...	2
Накопленные частоты (F_i)	1	8	40	...	100

Накопленные частоты, приведенные в 5-й строке, могут быть использованы в некоторых статистических расчетах (например, для вычисления критерия λ по Колмогорову). Накопленные частоты вычисляются путем простого суммирования частот от 1-го до N-го класса: $F_1 = f_1$; $F_2 = f_1 + f_2$; $F_3 = f_1 + f_2 + f_3$ и т. д.

3.3. Определение квантилей

Квантиль — точка на числовой оси (значение признака), делящая совокупность наблюдений в определенной пропорции. Определение квантилей достаточно часто используется в психодиагностических процедурах (при определении тестовых норм и т. д.). Для определения квантилей необходимо иметь ряд значений исследуемого признака, ранжированных в порядке возрастания величины.

Различают несколько разновидностей квантилей:

а) *квартили* (Q) делят совокупность наблюдений (ранжированный ряд) на 4 равные части: 1-й квартиль (Q_1) делит ряд в соотношении 25 : 75 %, 2-й (Q_2) — в соотношении 50 : 50 % и 3-й (Q_3) — в соотношении 75 : 25 %.

б) *квинтили* (K) делят выборку на 5 равных частей: K_1 — в соотношении 20 : 80 %, K_2 — 40 : 60 %, K_3 — 60 : 40 %, K_4 — 80 : 20 %.

в) *децили* (D) делят ранжированный ряд на 10 равных частей: $D_1 = 10$ %, $D_2 = 20$ %, ..., $D_9 = 90$ %.

г) наконец, *процентили* (P) делят совокупность наблюдений на 100 частей (в процентном отношении).

Соотношения квантилей можно представить в виде следующей схемы:

		K_1			K_2		K_3			K_4		
x_{min}	D_1	D_2		D_3	D_4	D_5	D_6	D_7		D_8	D_9	x_{max}
	P_{10}	P_{20}		P_{30}	P_{40}	P_{50}	P_{60}	P_{70}		P_{80}	P_{90}	
			Q_1			Q_2			Q_3			

Пример

На 20 испытуемых определялся уровень личностной тревожности (УЛТ) по тесту Спилбергера. При ранжировании значений признака получен следующий вариационный ряд (см. таблицу). Задача состоит в том, чтобы определить значения 1-го, 2-го и 3-го квартилей.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
УЛТ	31	32	32	34	36	36	36	37	39	41	42	42	43	44	45	45	45	46	47	48

$Q_1 = 36$ $Q_2 = 41{,}5$ $Q_3 = 45$

Для определения значений квартилей разбиваем ранжированный ряд на 4 равные части (по 5 значений признака). 1-й квартиль располагается между 5-м и 6-м значениями ряда, оба из которых соответствуют 36. Следовательно, $Q_1 = 36$. 2-й квартиль расположен между 10-м значением, равным 41, и 11-м, равным 42. Представляется разумным определить значение 2-го квартиля как среднее между двумя смежными значениями ($Q_2 = 41{,}5$). Значение 3-го квартиля лежит между 15-м и 16-м значениями ряда ($Q_3 = 45$).

Точно так же мы можем определить значения квинтилей (разбиение ранжированного ряда на 5 частей по 4 значения признака) или децилей (разбиение ряда на 10 равных частей по 2 значения переменной в каждой).

3.4. Графическое представление результатов

Графическое представление результатов психологического исследования имеет ряд несомненных преимуществ перед табличным (цифровым) материалом в тех случаях, когда речь идет о докладах, научных отчетах и сообщениях, диссертационных работах и т. д. Графическое представление наиболее наглядно, оно позволяет визуально выразить полученные закономерности, связи и пр. В данном разделе мы коснемся лишь графического представления распределений исследуемого признака.

В основе графического представления лежат составленные заранее таблицы сгруппированных частот. Первый вид представления — построение столбчатых диаграмм (гистограмм) распределения признака (см. рис. 3.1, *а*). Гистограммы строятся в координатах $f = \varphi(x_i)$, где по оси абсцисс откладываются значения признака (x_i), а по оси ординат — частота встречаемости признака (f). Ширина каждого столбца гистограммы соответствует ширине класса, а высота столбца — частоте встречаемости признака в данном классе.

Вместо диаграмм можно использовать построение полигона распределения (см. рис. 3.1, *б*). В этом случае распределение ото-

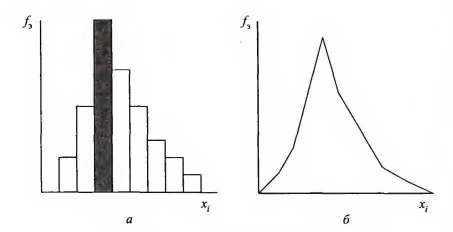


Рис. 3.1. Графическое представление результатов исследования:
а — столбчатая диаграмма (выделенный столбец соответствует модальному классу);
б — полигон распределения

бражается в виде точек, соединенных друг с другом прямыми линиями. Координаты каждой точки соответствуют среднему значению класса (по оси абсцисс) и частоте встречаемости признака в данном классе (по оси ординат).

РАЗДЕЛ 4
МЕРЫ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЕНДЕНЦИИ

Центральная тенденция — то количественное (численное) значение признака, к которому тяготеет переменная величина. Поскольку понятие «тяготеет» несколько произвольно и с математической точки зрения не вполне корректно, имеет смысл рассмотреть различные меры центральной тенденции более подробно.

В психологических исследованиях в качестве мер центральной тенденции чаще всего используются *мода*, *медиана* и *среднее арифметическое значение*. Значительно реже используются такие меры, как *среднее геометрическое*, *среднее гармоническое*, *обратное среднее гармоническое значение* и др.

4.1. Мода

***Мода* (*Мо*)** — наиболее часто встречающееся значение признака. В предыдущем примере (см. подразд. 3.3 ранжированный ряд уровня личностной тревожности) мы имеем две моды: $Mo_1 = 36$ и $Mo_2 = 45$ (эти значения переменной встречаются трижды, в то время как все остальные — по одному-два раза). В зависимости от того, сколько значений признака удовлетворяют определению моды, различают *мономодальные* (имеющие одну моду), *бимодальные* (имеющие две моды) и *полимодальные* распределения (имеют более чем две моды), а также *распределения*, *не имеющие моды* (все значения признака встречаются примерно с одинаковой частотой). В бимо-

дальном и полимодальном распределениях, в свою очередь, можно определить наибольшую и наименьшую моды.

В тех случаях, когда анализируются таблицы сгруппированных частот исследуемого признака, как правило, определяется *модальный класс*, т. е. тот класс распределения, в который попадает наибольшее количество частот (значений признака). Так, выделенный столбец на рис. 3.1, *а* соответствует модальному классу.

Мода не является достаточно строгой мерой центральной тенденции, поскольку она не учитывает характера распределения переменных, а значит может использоваться лишь в предварительных выводах и прогнозах. Кроме того, необходимо использовать моду только для больших объемов выборок, поскольку для малых она недостаточно информативна.

4.2. Медиана

Медиана (Md) — значение, которое делит упорядоченное множество данных (ранжированный ряд) пополам так, что одна половина значений оказывается больше, а другая — меньше медианы. Медиана — среднее значение ранжированного ряда. Если число значений нечетное, то медиана соответствует среднему члену ряда, если четное, то медиана есть среднее между двумя центральными значениями (в предыдущем примере в подразд. 3.3 $Md = 41{,}5$).

Медиана соответствует 50-му процентилю, 5-му децилю или 2-му квартилю в группе данных, т. е. $Md = P_{50} = D_5 = Q_2$.

Мода и медиана не учитывают разброса данных, и переменные, лежащие в стороне от центра, не влияют на их величину.

4.3. Среднее арифметическое значение

Среднее арифметическое значение, или просто ***среднее***, ($\bar{x}$) равно сумме переменных, деленной на их число.

Для несгруппированных переменных среднее арифметическое вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum x_i . \qquad (4.1)$$

Для сгруппированных переменных можно воспользоваться другой формулой — среднее будет соответствовать сумме произведений средних значений каждого класса и частоты встречаемости значения признака в данном классе:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 f_1 + \bar{x}_2 f_2 + ... + \bar{x}_N f_N}{n} = \frac{1}{n}\sum \bar{x}_i f_i . \qquad (4.2)$$

Среднее арифметическое может использоваться и для тех признаков, для которых не найден способ количественного измерения (шкала порядка). Для этого в качестве x_i используются ранговые числа, а среднее принято называть ***непараметрическим средним***.

Взвешенное среднее арифметическое используется в тех случаях, когда разные составляющие имеют разный «удельный вес» в формировании общей совокупности:

$$\bar{x}_w = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_N p_N}{n} = \frac{\sum x_i p_i}{n}, \qquad (4.3)$$

или

$$\bar{x}_w = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_N p_N}{p_1 + p_2 + ... + p_N}, \qquad (4.4)$$

где n — объем выборки, N — число классов.

Пример

Средний балл аттестата учащихся выпускных классов одной из школ соответствует следующим значениям: 11 «А» — 4,2; 11 «Б» — 4,0 и 11 «В» — 3,8. Численность этих классов составляет: 11 «А» — 25 человек, 11 «Б» — 28 и 11 «В» — 32 человека. В данном случае средний балл аттестата по всем выпускным классам составит (4,2 · 25 + 4,0 · 28 + 3,8 · 32) : (25 + 28 + 32) = 3,98.

Среднее принято округлять с точностью до знака, следующего за последним знаком x_i (увеличение точности на порядок).

Свойства среднего

1. Сумма всех отклонений от среднего значения равна нулю: $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$.

Доказательство:

$$\sum(x_i - \bar{x}) = \sum x_i - \sum \bar{x} = \sum x_i - n\bar{x} = \sum x_i - n \cdot \frac{\sum x_i}{n} =$$

$$= \sum x_i - \sum x_i = 0 \text{, поскольку “ } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}.$$

2. Если константу c прибавить к каждому значению, то среднее x_i превратится в $x_i + c$.

Доказательство:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum(x_i + c) = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i + \frac{1}{n} \cdot \sum c = \bar{x} + \frac{1}{n} \cdot nc = \bar{x} + c.$$

3. Если каждое значение множества со средним $\bar{x}$ умножить на константу c, то среднее станет равным $c\bar{x}$.

Доказательство: $\dfrac{\sum cx_i}{n} = \dfrac{c\sum x_i}{n} = c\bar{x}$.

4. Сумма квадратов отклонений значений от их среднего арифметического меньше суммы квадратов отклонений от любой другой точки: $\sum(x_i - \bar{x})^2 < \sum(x_i - b)$ (при условии, что $b \neq \bar{x}$).

Доказательство:

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 <$$

$$< (x_1 - b)^2 + (x_2 - b)^2 + \ldots + (x_n - b)^2 \text{, где } b \neq \bar{x}.$$

Примем $b = \bar{x} + c$. Тогда:

$$\sum[x_i - (\bar{x} + c)]^2 = \sum[(x_i - \bar{x}) - c]^2 =$$

$$= \sum(x_i - \bar{x})^2 - 2c\sum(x_i - \bar{x}) + nc^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 + nc^2,$$

поскольку $\sum (x_i - \bar{x}) = 0.$

Так как $c^2 > 0$, то $\sum (x_i - \bar{x})^2 < \sum \left[x_i - (\bar{x} + c)^2\right].$

4.4. Среднее геометрическое значение

Среднее геометрическое значение (x_g) используется для вычисления центральной тенденции при прогрессивно возрастающих квантилях (когда распределение значений переменной имеет выраженную положительную (правостороннюю) асимметрию).

Формула среднего геометрического:

$$x_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}. \qquad (4.5)$$

Для вычислений можно использовать логарифмирование каждой переменной по основанию *e*:

$$\ln x_g = \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n}{n}. \qquad (4.6)$$

Переход от $\ln x_g$ к x_g осуществляется с помощью операции антилогарифмирования:

$$x_g = e^{\ln x}. \qquad (4.7)$$

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ

Задача 4.1

У 50 школьников выпускных классов исследовался коэффициент интеллекта (IQ). Получен следующий вариационный ряд (см. таблицу на с. 32).

Задания

1. Построить ранжированный ряд IQ.
2. Построить таблицу сгруппированных частот для 7—8-классового распределения.

№	IQ	№	IQ	№	IQ	№	IQ	№	IQ
1	119	11	104	21	111	31	103	41	107
2	86	12	88	22	98	32	88	42	92
3	100	13	113	23	84	33	108	43	105
4	93	14	89	24	102	34	70	44	89
5	108	15	103	25	92	35	113	45	95
6	117	16	107	26	88	36	83	46	110
7	82	17	78	27	104	37	91	47	101
8	100	18	110	28	127	38	97	48	85
9	86	19	98	29	103	39	87	49	114
10	129	20	84	30	112	40	101	50	102

3. Построить графическое выражение IQ в виде полигона распределения или столбчатой диаграммы.

4. Определить 1-й, 2-й и 3-й квартили, моду, медиану и среднее арифметическое значение коэффициента интеллектуальности для выборки в 50 испытуемых.

Задача 4.2

В трех выпускных классах средней школы подсчитывался средний балл успеваемости. Получены следующие результаты:

Пол	Класс					
	11 «А»		11 «Б»		11 «В»	
	число учащихся	балл	число учащихся	балл	число учащихся	балл
Девочки	18	3,62	15	3,90	17	3,75
Мальчики	12	3,44	13	3,58	13	3,70

Задание

Вычислить средний балл успеваемости у девочек и мальчиков всех выпускных классов.

Задача 4.3

Имеется следующая совокупность экспериментальных данных: 1,00; 1,26; 1,58; 2,00; 2,51; 3,16; 3,98; 5,01; 6,31; 7,94.

Задание

Вычислить среднее геометрическое значение данной совокупности двумя способами: 1) определением произведения значений и возведением в соответствующую степень; 2) путем логарифмирования по основанию *e*.

РАЗДЕЛ 5

МЕРЫ ИЗМЕНЧИВОСТИ (РАЗНООБРАЗИЯ, ВАРИАТИВНОСТИ) ИССЛЕДУЕМОГО ПРИЗНАКА

Две выборочные совокупности могут иметь одинаковые или близкие между собой средние значения признака и в то же время существенно различаться по степени вариабельности (вариативности) этого признака.

Например, имеется две группы испытуемых (по 100 человек в каждой), у которых исследуется коэффициент интеллекта (IQ). Средние значения IQ в той и другой группе могут приблизительно совпадать (допустим, $IQ_1 = 102$ и $IQ_2 = 97$), и констатация этого факта даст нам очень немного информации. В то же время известно, что индивидуальные значения в первой группе испытуемых изменяются от 85 до 116, а во второй — от 60 до 135. На основании этого мы можем сказать, что вторая выборка обладает большим разнообразием признака по сравнению с первой.

Для определения степени разнообразия (изменчивости) исследуемого параметра используются различные критерии: пределы разнообразия, размах вариаций, среднее и стандартное отклонения, дисперсия, коэффициент вариации и др.

5.1. Лимиты (пределы) разнообразия

Лимит (предел) разнообразия — это указание наименьшей и наибольшей величины признака среди всех представителей группы:

$$\lim x = x_{\min} \div x_{\max}. \qquad (5.1)$$

Другими словами, предел разнообразия признака не вычисляется, а лишь констатируется. Так, в приведенном выше примере $\lim x_1 = 85 \div 116$ и $\lim x_2 = 60 \div 135$.

5.2. Размах вариаций

Размах вариаций (ρ) есть математическая разность между максимальной и минимальной величиной признака:

$$\rho = x_{max} - x_{min}. \qquad (5.2)$$

В нашем примере размах вариаций в первой группе (ρ_1) составляет 116 – 85 = 31 и во второй (ρ_2) — 135 – 60 = 75.

Размах от 10-го до 90-го процентиля (***мера D***) вычисляется следующим образом:

$$D = P_{90} - P_{10} = D_9 - D_1. \qquad (5.3)$$

Другими словами, для вычисления меры D отсекается по 10 % значений с левого и правого края распределения и определяется размах вариаций для оставшихся 80 %. Эта мера более стабильна, чем включающий и исключающий размах, поскольку на него не влияют крайние (возможно, случайные) значения вариаций.

Междуквартильный размах — еще более жесткая мера изменчивости, нежели мера D. Междуквартильный размах — это разность между 1-м и 3-м квартилями группы:

$$Q = Q_3 - Q_1. \qquad (5.4)$$

Другими словами, для определения междуквартильного размаха с краев распределения признака отсекается по 25 % значений и определяются границы для оставшихся (наиболее типичных) 50 %, которые в максимальной степени характеризуют центральную тенденцию.

Полумеждуквартильный размах ($Q_{1/2}$) равен половине расстояния между 1-м и 3-м квартилями:

$$Q_{1/2} = \frac{Q}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}. \qquad (5.5)$$

Суть этой статистической меры состоит в уравнивании между собой расстояний между 1-м и 2-м и между 2-м и 3-м квартилями, которые в случае несимметричных распределений могут отличаться друг от друга. В случае же симметричного распределения полумеждуквартильный размах включает в себя приблизительно 25 % данных.

5.3. Среднее отклонение

***Среднее отклонение* (*MD*)** — параметрическая мера изменчивости, предложенная в свое время Г. Т. Фехнером. Среднее отклонение равно сумме отклонений от среднего значения (или, другими словами, сумме расстояний между x_i и $\bar{x}$), взятых по модулю:

$$MD = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}. \qquad (5.6)$$

5.4. Дисперсия

***Дисперсия* (σ^2)** представляет собой сумму квадратов отклонений от среднего (сумму квадратов расстояний между x_i и $\bar{x}$):

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \qquad (5.7)$$

Деление суммы квадратов на число степеней свободы $n - 1$ позволяет сравнивать между собой совокупности, различные по объему. Считается, что дисперсия — более мощный статистический критерий, нежели среднее отклонение, так как больший вклад в дисперсию дают те значения признака, которые расположены дальше от среднего (вклад каждого значения в дисперсию возрастает пропорционально квадрату отклонения от среднего).

Формула 5.7 не очень удобна при расчете дисперсии вручную (на микрокалькуляторе). Поэтому для этих целей можно использо-

вать другую (рабочую) формулу, которую можно получить путем соответствующих преобразований.

Преобразование формулы:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum \left(x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2\right)}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + \sum \bar{x}^2}{n-1}.$$

Но $\sum \bar{x} = n\bar{x}$ и $\sum x_i = n\bar{x}$. Отсюда следует, что

$$\frac{\sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}.$$

Так как $\bar{x}^2 = \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n^2}$, то

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 / n}{n-1} = \frac{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{n(n-1)}. \qquad (5.8)$$

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия не изменится, если к каждому значению x_i прибавить константу c: $x_j = x_i + c \Rightarrow \sigma_j^2 = \sigma_i^2$.

2. Умножение на константу c каждого значения x_i увеличивает дисперсию в c^2 раз: $x_j = cx_i \Rightarrow \sigma_j^2 = c^2 \cdot \sigma_i^2$.

5.5. Среднеквадратичное (стандартное) отклонение

Стандартное отклонение (σ_x) соответствует квадратному корню из дисперсии. Наряду с дисперсией является одной из наиболее часто используемых мер вариабельности признака.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 / n}{n-1}}. \qquad (5.9)$$

5.6. Коэффициент вариации

Коэффициент вариации (***V***) есть отношение стандартного отклонения к среднему арифметическому значению, выраженное в процентах:

$$V = \frac{\sigma}{x} \cdot 100\,\%. \qquad (5.10)$$

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ

Задача 5.1

В психофизиологическом эксперименте регистрировалось время простой сенсомоторной реакции у 50 испытуемых в ответ на звуковой стимул средней интенсивности. Получены следующие значения времени реакции (ВР) в миллисекундах:

№	*T*, мс	№	*T*, мс	№	*T*, мс	№	*T*, мс	№	*T*, мс
1	138	11	137	21	136	31	142	41	149
2	180	12	172	22	132	32	164	42	158
3	160	13	143	23	135	33	147	43	145
4	144	14	126	24	142	34	144	44	155
5	169	15	139	25	129	35	131	45	161
6	140	16	130	26	139	36	150	46	148
7	178	17	127	27	156	37	128	47	166
8	134	18	144	28	130	38	143	48	146
9	141	19	125	29	141	39	133	49	128
10	174	20	132	30	175	40	151	50	153

Задание

1. Определить размах вариаций, междуквартильный и полумеждуквартильный размах, среднее отклонение, дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации.

2. Построить обычную и кумулятивную кривые распределения ВР. Определить процентное соотношение частот при нормирова-

нии распределения по стандартному отклонению от –4 до +4σ с шагом в 1σ.

3. Определить размах распределения признака в единицах стандартного отклонения.

Задача 5.2

Проведено тестирование двух групп испытуемых (по 10 человек в каждой) на уровень личностной тревожности (УЛТ) по Спилбергеру. Получены следующие результаты:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$УЛТ_1$	24	42	29	39	26	37	40	33	44	38
$УЛТ_2$	34	40	26	47	29	31	38	43	45	42

Задание

Определить средние значения УЛТ, стандартные отклонения и коэффициенты вариаций для каждой группы испытуемых, сравнить их между собой, сделать выводы.

РАЗДЕЛ 6
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН

В разделах 3 и 4 были даны основные представления о распределениях переменных величин (моно-, би-, полимодальные и др.). В этих случаях речь шла об эмпирических (экспериментальных) распределениях, которые могут иметь весьма разнообразный (зачастую непредсказуемый) характер. Подойдем к данному вопросу с несколько иной стороны. Кроме эмпирических (построенных на основе данных экспериментального исследования), существуют и теоретические распределения. Любое теоретическое распределение представляет собой определенную математическую модель, которой (с определенной долей вероятности) могут соответствовать (или не соответствовать) экспериментальные распределения. Перед психологом достаточно часто возникает проблема сопоставления экспериментального распределения с теоретическим — в плане выбора наиболее адекватного метода математической обработки результатов (см. разд. 7), для прогнозирования вероятности тех или иных событий и т. д. В данном разделе будут рассмотрены лишь те виды распределений, с которыми психологам приходится встречаться особенно часто. Особое внимание будет уделено *нормальному распределению*. Кроме него, будут рассмотрены *равномерное, биномиальное распределения* и *распределение Пуассона*.

6.1. Нормальное распределение

6.1.1. Основные понятия

Нормальное распределение (*распределение Гаусса*, *распределение Муавра — Лапласа*) — это распределение значений переменной величины в тех случаях, когда она варьирует случайным образом и не подвержена влиянию какого-либо систематического фактора.

Формула нормального распределения:

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-(x_i - \bar{x})^2 / 2\sigma^2}, \quad \varphi(x) = a e^{-b(x_i - \bar{x})^2}, \qquad (6.1, a, б)$$

где f — теоретическая частота встречаемости значения x_i; σ — стандартное отклонение; a, b — константы; $\pi \approx 3{,}142$ (отношение длины окружности к диаметру); $e \approx 2{,}718$ (основание натурального логарифма).

Теоретическое нормальное распределение имеет вид симметричной колоколообразной кривой, которая подчиняется следующим закономерностям:

1. Правая и левая ветви теоретического нормального распределения абсолютно симметричны и как бы зеркально отражают друг друга.

2. В нормальном распределении основные показатели центральной тенденции (мода, медиана и среднее арифметическое значение) совпадают и соответствуют самой высокой точке (вершине) распределения.

3. Правая и левая ветви распределения уходят в бесконечность, никогда не соприкасаясь с осью абсцисс. Другими словами, частота (вероятность) встречаемости того или иного значения признака может быть сколь угодно мала, но никогда не равна нулю. В практическом отношении это свойство нормального распределения весьма неудобно, так как погоня за бесконечностью — занятие весьма неблагодарное. Поэтому принято анализировать полученные данные в диапазоне от –4 до +4 стандартных отклонений (теоретически в этот диапазон должно попадать ~99,98 % экспериментальной выборки). В то же время сужение диапазона до $\pm 3\sigma$ несколько рискованно, так как значения, даваемые «крайними» испытуемыми, могут выпасть из рассмотрения.

При переводе экспериментальных значений в единицы стандартного отклонения может быть использована мера Пирсона:

$$z = (x_i - \bar{x})/\sigma_x.$$

На рис. 6.1 показаны теоретические частоты встречаемости значений признака (в процентном соотношении) при разбиении диапазона от –4 до +4σ на восемь равных классов (ширина каждого класса соответствует одному стандартному отклонению), а на рис. 6.2 — соответствующие 8-классовому распределению кумулятивные (накопленные) частоты. Эти численные значения могут понадобиться для сравнения экспериментально полученного распределения с теоретическим.

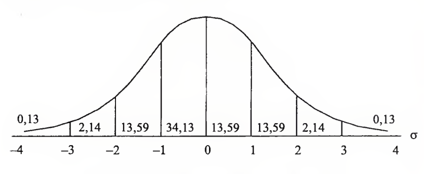


Рис. 6.1. Кривая нормального распределения, %

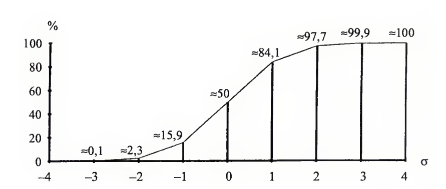


Рис. 6.2. Кумулятивная кривая нормального распределения

Кроме 8-классового, иногда используют 16-классовое распределение — в этом случае диапазон от –4 до +4σ разбивают на 16 равных классов с шагом 0,5σ.

Зная нормальное распределение частот, можно решить обратную задачу — определить размах (в единицах стандартного отклонения), в который укладывается определенное количество (процент) значений выборочной совокупности. Так, 90 % выборки укладываются в ±1,645σ; 95 % — в ±1,96σ; 99 % — в ±2,58σ; 99,9 % — в ±3,29σ. Как будет показано далее, эти соотношения имеют большое значение для определения достоверности некоторых статистических выводов при разных уровнях значимости.

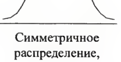
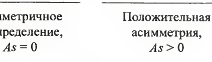
Двумерное нормальное распределение можно получить, измеряя две относительно независимые друг от друга переменные. Оно строится в трехмерном пространстве, в координатах $f(x, y)$, и имеет колоколообразный вид.

Как отмечалось ранее, распределения переменных величин, получаемые в эксперименте, имеют определенную степень приближения к теоретическому (нормальному) распределению. В данном случае степень соответствия эмпирического распределения нормальному позволяет определить, насколько случайно или закономерно варьирует тот или иной показатель, подвержен ли он влиянию каких-либо систематических факторов и т. д.

Существует ряд статистических критериев, позволяющих сравнить экспериментально полученное распределение с теоретическим (нормальным). Основными из них являются коэффициент асимметрии, показатель эксцесса, критерий хи-квадрат Пирсона (χ^2) и критерий λ Колмогорова — Смирнова.

6.1.2. Коэффициент асимметрии

Распределение может быть приблизительно симметричным относительно моды либо обладать отрицательной или положительной асимметрией. Положительно асимметричным считается распределение с более крутым левым и более пологим правым крылом, распределение с отрицательной асимметрией, напротив, имеет более пологий левый фронт нарастания и более крутой правый (рис. 6.3).

Отрицательная асимметрия, $As < 0$ | Симметричное распределение, $As = 0$ | Положительная асимметрия, $As > 0$

Рис. 6.3. Типы асимметрии

Рассчитываемый по соответствующим формулам коэффициент асимметрии (As) может быть использован в качестве одного из критериев соответствия экспериментального распределения теоретическому.

Вычисление коэффициента асимметрии

Коэффициент асимметрии вычисляется по следующей формуле:

$$As = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{n\sigma^3} = \frac{\sum z_x^3}{n}, \qquad (6.2)$$

где z_x — мера Пирсона $\left(z_x = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)$.

При больших выборках ($n > 50$) можно использовать упрощенную формулу:

$$As = \frac{3(\bar{x} - Md)}{\sigma}. \qquad (6.3)$$

Соответствие эмпирического распределения нормальному находится по соответствующим таблицам (см. прил., табл. 1). При этом эмпирическое распределение считается соответствующим теоретическому (нормальному), если асимметрия при данной выборке не превышает граничного значения.

Пример

При распределении значений исследуемого признака для выборки в 100 человек коэффициент асимметрии $As = 0{,}55$.

Вопрос: соответствует ли данное распределение нормальному?

Решение: в табл. 1 (см. прил.) находим, что для $n = 100$ $As_{кр} = 0{,}39$ (для $\beta_1 = 0{,}95$) и $As_{кр} = 0{,}57$ (для $\beta_1 = 0{,}95$).

Ответ: распределение статистически достоверно отличается от нормального с вероятностью 0,95, поскольку $As_э > As_{кр}$. С вероятностью же 0,99 аналогичного вывода мы сделать не можем ($As_э < As_{кр}$).

Причины асимметрии могут быть различными. Во-первых, это возможное действие побочных однонаправленных факторов. Так, например, в тестах на измерение интеллекта могут преобладать сложные задания, с которыми большинство испытуемых не справляется. Это может явиться причиной положительной асимметрии (центральная тенденция лежит слева от среднего значения). Во-вторых, это ограничение (сверху или снизу) размаха вариаций. Например, при измерении времени сенсомоторной реакции нижний предел реагирования лимитирован физиологическими возможностями субъекта, в то время как верхний жестко не ограничен. Наконец, третьей причиной асимметрии может быть неоднородность выборки (например, если исследование проводится в смешанной группе разного возраста). При этом имеет место наложение друг на друга двух или нескольких разных по численности и сдвинутых относительно друг друга по моде распределений.

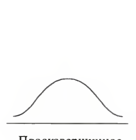
6.1.3. Коэффициент эксцесса

В отличие от коэффициента асимметрии, коэффициент (показатель) эксцесса характеризует компактность или «размытость» распределения, его островершинность или плосковершинность, что связано с разным характером группирования значений переменной вокруг среднего (рис. 6.4).

Причинами эксцесса могут быть большая или меньшая степень тяготения переменных к центральной тенденции, неоднородность выборки, наложение друг на друга нескольких распределений с одинаковой модой и разной дисперсией и т. д.

Вычисление показателя эксцесса

$$Ex = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{n\sigma^4} - 3 = \frac{\sum z_x^4}{n} - 3. \quad (6.4)$$





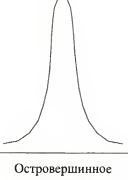


Рис. 6.4. Типы эксцесса

Теоретически величина эксцесса может варьировать от –3 до +∞. Критерий согласия с нормальным распределением аналогично коэффициенту асимметрии определяется по таблицам граничных значений. Например, для $n = 100$ и $\beta_1 = 0{,}95$ $Ex_{кр} = 0{,}83$ (см. прил., табл. 2).

Аналогично определению асимметрии распределение соответствует нормальному (согласуется с нормальным), если $Ex < Ex_{кр}$. При обратном соотношении принято говорить, что по показателю эксцесса эмпирическое распределение статистически достоверно отличается от нормального.

При анализе эмпирического распределения может возникнуть такая ситуация, когда по одному из показателей (асимметрии или эксцессу) распределение соответствует нормальному, по другому же — отличается от него. В этом случае используется следующее правило: если хотя бы по одному из вышеуказанных показателей распределение достоверно отличается от нормального, то экспериментальное распределение будет отличаться от теоретического (нормального).

Кроме коэффициента асимметрии и показателя эксцесса, для сравнения экспериментального распределения с теоретическим используют и другие критерии, в частности критерий хи-квадрат и критерий λ Колмогорова — Смирнова.

6.1.4. Критерий хи-квадрат (χ^2)

Критерий хи-квадрат основан на сравнении между собой эмпирических (экспериментальных) частот исследуемого признака и теоретических частот нормального распределения. Для сравнения частот можно пользоваться как 8-классовым, так и 16-классовым распределениями, теоретические частоты которых в интервале от –4 до +4 стандартных отклонений даны в приложении (табл. 3 и 4). В случае необходимости можно вычислять хи-квадрат и по большему числу классов — для этого используют специальные таблицы нормального распределения.

Критерий χ^2 рассчитывают по следующей формуле:

$$\chi^2 = \sum \; [(f_э - f_т)^2/f_т], \qquad (6.5)$$

где $f_э$ и $f_т$ — соответственно экспериментальные и теоретические частоты в каждом отдельном классе разбиения. Полученное значение сравнивается со стандартным (табличным). Решение о соответствии экспериментального распределения теоретическому принимается, если $\chi^2 < \chi^2_{кр}$ при соответствующем числе степеней свободы и заданном уровне значимости. При этом необходимо иметь в виду, что в случае *нормального распределения* число степеней свободы (ν) принимается равным $N - 3$, где N — число классов (групп разбиения).

Рассмотрим алгоритм вычислений критерия χ^2.

Пример

У 100 испытуемых определялся уровень нейротизма по тесту Айзенка. Получены следующие результаты (табл. 6.1):

Таблица 6.1

Уровень нейротизма	Частота	Уровень нейротизма	Частота	Уровень нейротизма	Частота	Уровень нейротизма	Частота
x_i	$f_э$	x_i	$f_э$	x_i	$f_э$	x_i	$f_э$
1	0	7	3	13	10	19	4
2	0	8	4	14	8	20	3
3	0	9	6	15	9	21	1

Уровень нейротизма	Частота	Уровень нейротизма	Частота	Уровень нейротизма	Частота	Уровень нейротизма	Частота
x_i	$f_э$	x_i	$f_э$	x_i	$f_э$	x_i	$f_э$
4	0	10	8	16	9	22	0
5	2	11	9	17	8	23	0
6	3	12	7	18	6	24	0

Задание

Определить соответствие экспериментального распределения теоретическому (нормальному) распределению с помощью критерия χ^2 Пирсона.

Решение

Задача решается в три этапа:

1. Определяем среднее значение переменной и ее стандартное отклонение. Поскольку в данном случае мы имеем дело со сгруппированными частотами, то для вычисления среднего арифметического следует использовать следующую формулу (см. разд. 4):

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 f_1 + \bar{x}_2 f_2 + ... + \bar{x}_N f_N}{n} = \frac{1}{n}\sum \bar{x}_i f_i .$$

Подставляем в формулу значения нейротизма и соответствующие ему частоты из условия задачи:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + ... + 21 \cdot 1}{100} = 13{,}2 .$$

Стандартное отклонение следует определять по формуле (см. разд. 5):

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} .$$

В нашем случае:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(5-13{,}2)^2 \cdot 2 + (6-13{,}2)^2 \cdot 3 + ... + (21-13{,}2)^2}{99}} = 3{,}8 .$$

2. Нормируем полученные результаты в единицах стандартного отклонения с «шагом» в 1σ (8-классовое распределение). Для этого строим шкалу значений в единицах стандартного отклонения от –4 до +4σ. Далее определяем границы каждого из 8 классов в абсолютных значениях исследуемого показателя (уровней нейротизма). Напомним, что точкой отсчета в данном случае является центральное значение ($\sigma_x = 0$), которому теоретически должны соответствовать основные меры центральной тенденции — мода, медиана и среднее арифметическое значение (см. подразд. 6.1.1). Обозначим среднюю точку значением 13,2 (среднее арифметическое). После этого определяем границы классов в абсолютных единицах (значениях нейротизма), последовательно вычитая из среднего (слева от нулевой точки) или добавляя к среднему (справа от нее) величину стандартного отклонения ($\sigma_x = 3,8$). Наконец, подсчитываем частоты (число испытуемых) в каждом из классов и разносим полученные значения по классам теоретического распределения. Для большей наглядности можно представить результаты в виде следующей схемы:

–4σ –3σ –2σ –σ 0 –σ –2σ –3σ –4σ

| 0 | 2 | 16 | 34 | 30 | 17 | 1 | 0 |

–2,0 1,8 5,6 9,4 13,2 17,0 20,8 24,6 28,4

3. Составляем таблицу для вычисления критерия χ^2 Пирсона (см. табл. 6.2). В столбце 1 обозначаем классы распределения (в единицах стандартного отклонения, в столбце 2 — подсчитанные нами экспериментальные частоты в каждом классе, в столбце 3 — теоретические частоты в процентном соотношении (см. прил., табл. 3). Столбец 4 служит для попарного сопоставления экспериментальных и теоретических частот: для этого следует использовать формулу $\frac{(f_э - f_т)^2}{f_т}$.

Критерий χ^2 вычисляется как сумма значений в столбце 4 таблицы. Проводим соответствующие вычисления:

$$\chi^2 = \sum\left[\frac{(f_э - f_т)^2}{f_т}\right] = 2,68 .$$

Таблица 6.2

Граница класса, σ	Частота		$\frac{(f_э - f_т)^2}{f_т}$
	$f_э$	$f_т$	
–4 ÷ –3	0	0,13	0,13
–3 ÷ –2	2	2,15	0,01
–2 ÷ –1	16	13,59	0,43
–1 ÷ 0	34	34,13	0
0 ÷ 1	30	34,13	0,50
1 ÷ 2	17	13,59	0,86
2 ÷ 3	1	2,15	0,62
3 ÷ 4	0	0,13	0,13

В приложении (табл. 4) находим стандартные (критические) значения χ^2. Напомним, что для 8-классового распределения ($N = 8$) число степеней свободы $\nu = N - 3 = 5$. При этом стандартные значения $\chi^2_{ст}$ для двух уровней значимости составляют соответственно 11,070 ($\beta_1 = 0{,}95$) и 15,086 ($\beta_2 = 0{,}99$).

Вывод

Для двух стандартных уровней значимости $\chi^2 < \chi^2_{ст}$, следовательно, по критерию χ^2 Пирсона экспериментальное распределение статистически не отличается от теоретического (нормального) распределения или, другими словами, соответствует последнему. Данный вывод можно считать справедливым для уровня значимости 0,99.

Примечания:

1. Если по каким-либо причинам результаты анализа не удовлетворяют исследователя (например, $\chi^2 < \chi^2_{ст}$), можно воспользоваться таблицей 16-классового распределения (см. прил., табл. 4). В данном случае диапазон вариаций также составляет –4 ÷ +4σ, но ширина каждого класса вдвое меньше (0,5σ). Кроме того, следует учесть, что при сравнении экспериментального значения хи-квадрат с критическим число степеней свободы в данном случае составляет $N - 3 = 13$.

2. Необходимо помнить о том, что теоретические частоты (см. прил., табл. 3, 4) рассчитаны в процентном соотношении. При решении задачи анализа распределения испытуемых по уровню нейротизма объем выборки составлял 100 человек, поэтому никаких дополнительных преобразова-

ний не требовалось. В том же случае, когда $n \neq 100$, необходимо уравнять частоты. При этом необходимо соблюдать правило, согласно которому экспериментальные частоты должны быть приведены к теоретическим (но не наоборот). Например, если $n = 200$, то экспериментальную частоту в каждом классе следует разделить на 2, если $n = 50$, то умножить на 2, а если, предположим, $n = 52$, то необходимо каждую экспериментальную частоту умножить на пересчетный коэффициент (в данном случае $k = 100 : 52 = 1{,}923$).

6.1.5. Критерий Колмогорова — Смирнова (λ)

Критерий Колмогорова — Смирнова основан на том же принципе, что и критерий χ^2 Пирсона, но предполагает сопоставление *накопленных* частот экспериментального и теоретического распределений. Вычисляется как отношение максимальной разности (без учета знака) между теоретической и экспериментальной накопленной частотой к корню квадратному из численности выборки:

$$\lambda = \frac{d_{max}}{\sqrt{n}}. \qquad (6.6)$$

Для вычисления λ также можно воспользоваться таблицами теоретических частот 8- и 16-классового распределения. Рассмотрим алгоритм вычислений критерия Колмогорова на примере предыдущей задачи (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Граница класса, σ	Экспериментальная частота, $f_э$	Накопленная частота		d
		$F_э$	$F_т$	
1	2	3	4	5
–4 ÷ –3	0	0	0,13	0,13
–3 ÷ –2	2	2	2,28	0,28
–2 ÷ –1	16	18	15,87	*2,13*
–1 ÷ 0	34	52	50,00	2,00
0 ÷ 1	30	82	84,13	***2,13***
4 ÷ 2	17	99	97,72	1,28
2 ÷ 3	1	100	99,87	0,13
3 ÷ 4	0	100	100	0

Столбцы 1 и 2 аналогичны таковым в табл. 6.2. Столбец 3 соответствует экспериментальным частотам, накопленным путем суммирования частот от 1-го до 8-го класса. Теоретические накопленные частоты взяты из приложения (табл. 3). Максимальная разность между экспериментальной и теоретической накопленными частотами (столбец 5) соответствует 2,13. Проводим соответствующие вычисления:

$$\lambda = \frac{d_{\max}}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}13}{\sqrt{100}} = 0{,}21.$$

Для определения соответствия экспериментального распределения теоретическому по критерию Колмогорова можно воспользоваться следующим правилом. Если $\lambda < 0{,}52$, делается вывод о соответствии распределений для уровня значимости 0,95. При $\lambda > 1{,}36$ распределение достоверно отличается от нормального. При значениях же λ от 0,52 до 1,36 (интервал неопределенности) можно определить вероятность соответствия экспериментального распределения теоретическому по табл. 7 (см. прил.).

Вывод

Полученное нами значение $\lambda = 0{,}21 < 0{,}52$, следовательно, по критерию Колмогорова экспериментальное распределение соответствует нормальному с вероятностью 0,95.

Для определения соответствия эмпирического распределения теоретическому (нормальному) распределению можно воспользоваться и другим способом, который зачастую дает более точные результаты, поскольку не ограничен числом классов. Этот способ будет нами рассмотрен на примере той же задачи. Порядок вычислений приводится в табл. 6.4.

1. В столбце 1 таблицы фиксируем значения x_i (уровень нейротизма).

2. Переводим значения x_i в меру z Пирсона по формуле:

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}.$$

3. Ориентируясь на условие задачи, вносим экспериментальные частоты в столбец 3.

Таблица 6.4

x_i	Z	$f_э$	$F_э$	$F_т$	d	$F_э*$	$d*$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	–3,2	0	0	0,07	0,07	0	0,07
2	–2,9	0	0	0,18	0,18	0	0,18
3	–2,7	0	0	0,34	0,34	0	0,34
4	–2,4	0	0	0,82	0,82	0	0,82
5	–2,2	2	2	1,40	0,60	1	0,40
6	–1,9	3	5	2,88	2,12	3,5	0,62
7	–1,6	3	8	5,49	2,51	6,5	1,01
8	–1,4	4	12	8,08	3,92	10	1,92
9	–1,1	6	18	13,57	4,43	15	1,43
10	–0,8	8	26	21,19	4,81	22	0,81
11	–0,6	9	35	27,43	***7,57***	30,5	3,07
12	–0,3	7	42	38,21	3,79	38,5	0,29
13	0	10	52	50,00	2,00	47	3,00
14	0,2	8	60	57,92	2,08	56	1,92
15	0,5	9	69	69,14	0,14	64,5	***4,64***
16	0,7	9	78	75,80	2,20	73,5	2,30
17	1,0	8	86	84,13	1,87	82	2,13
18	1,3	6	92	90,31	1,69	89	1,31
19	1,5	4	96	93,31	2,69	94	0,69
20	1,8	3	99	96,40	2,60	97,5	1,10
21	2,1	1	100	98,21	1,79	99,5	1,29
22	2,3	0	100	98,92	1,08	100	1,08
23	2,5	0	100	99,37	0,63	100	1,63
24	2,8	0	100	99,75	0,25	100	0,25

4. По значениям столбца 3 вычисляем накопленные экспериментальные частоты и фиксируем их в столбце 4.

5. По значениям z Пирсона определяем теоретические накопленные частоты, для чего используем табл. 5 (см. прил.).

6. Вычисляем критерий d, сравнивая между собой экспериментальные (столбец 4) и теоретические частоты по формуле

$$d = |F_э - F_т|.$$

7. Вычисляем критерий λ Колмогорова по стандартной формуле.

Ответ

$\lambda = 7{,}57 : 10 = 0{,}76$ (столбец 6 табл. 6.4), что соответствует интервалу неопределенности $0{,}52 \div 1{,}36$.

С целью устранения случайных факторов используем процедуру интервальной нормализации $\left(F_э^* = F_э - \frac{f_э}{2}\right)$ (столбец 7) и повторно вычисляем критерий λ:

$$\lambda^* = 4{,}64 : 10 = 0{,}46 \text{ (столбец 8 табл. 6.4).}$$

Общий ответ

Эмпирическое распределение соответствует теоретическому (нормальному) распределению.

6.2. Равномерное распределение

В ряде случаев психологу приходится иметь дело с *равномерным распределением*, когда варьирующая величина (переменная) приблизительно с равной вероятностью принимает любое значение в определенном фиксированном диапазоне от x_{min} до x_{max}. Пример такого распределения приводится на рис. 6.5.

Примером равномерного распределения может служить распределение испытуемых по квантилям, поскольку в каждом интервале квантильной шкалы частоты встречаемости признака одинаковы.

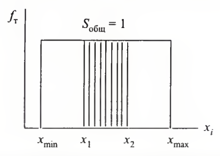


Рис. 6.5. Графическое выражение равномерного распределения

Работа с равномерным распределением достаточно проста. Учитывая, что общая площадь распределения соответствует $P = 1$, вероятность события в интересующем нас диапазоне $x_1 \div x_2$ равна отношению ширины этого диапазона (размаха вариаций) $x_2 - x_1$ к общему $(x_{max} \div x_{min})$. Для сравнения экспериментального распределения с теоретическим можно использовать критерий хи-квадрат, а при достаточном количестве эмпирических частот — и критерий Колмогорова. Рассмотрим использование этих критериев на двух примерах.

Пример 1

Можно априорно предположить, что число людей, обладающих одним из четырех основных типов темперамента (холерики, сангвиники, флегматики и меланхолики), приблизительно одинаково. Для проверки этой гипотезы проведено тестирование по тесту-опроснику Айзенка 100 взрослых испытуемых. Тип темперамента определялся у них по соотношению показателей экстраверсии и нейротизма.

Было получено следующее распределение испытуемых по типам темперамента: холерики — 22 человека, сангвиники — 36, флегматики — 13 и меланхолики — 29 человек.

Задача состоит в том, чтобы либо принять, либо отвергнуть изначальную гипотезу (нуль-гипотезу) о равномерности распределения людей по типам темперамента.

Для решения задачи можно составить таблицу, аналогичную той, которая использовалась для оценки согласия эмпирического распределения с нормальным по критерию хи-квадрат (табл. 6.5).

Таблица 6.5

Тип темперамента	Частота		$\frac{(f_э - f_т)^2}{f_т}$
	$f_э$	$f_т$	
Холерики (экстраверты с высоким уровнем нейротизма)	22	25	0,36
Сангвиники (эмоционально стабильные экстраверты)	36	25	4,84
Флегматики (эмоционально стабильные интроверты)	13	25	5,76
Меланхолики (интроверты с высоким уровнем нейротизма)	29	25	0,64

В данном случае следует пояснить, что теоретические частоты рассчитываются, исходя из гипотезы о том, что распределение по типам темперамента является идеально равномерным.

Вычисление показателя χ^2 (сумма значений в последнем столбце таблицы) дает величину 11,6. При сравнении полученного значения со стандартным (см. прил., табл. 6) следует иметь в виду, что для равномерного распределения число степеней свободы вычисляется как число групп (классов) разбиения минус единица: в нашем случае $\nu = N - 1 = 3$.

Полученное нами значение ($\chi^2 = 11{,}6$) больше стандартных (критических) значений как для 1-го ($\chi^2_{ст} = 7{,}815$), так и для 2-го уровня значимости ($\chi^2_{ст} = 11{,}345$). Отсюда следует, что принять гипотезу о равномерности распределения людей по типам темперамента мы не можем. Другими словами, распределение статистически достоверно отличается от равномерного.

Примечания:

1. Критерий χ^2 дает надежные результаты на выборках более 30 человек. На малых выборках ($n \leq 30$) критерий может «пробуксовывать» и данные могут быть подвергнуты сомнению.

2. Если число градаций признака равно двум, в формулу вычисления χ^2 необходимо вводить соответствующую поправку (так называемую поправку на непрерывность): $\frac{f_э - f_т - 0{,}5}{f_т}$.

Пример 2

В выборке здоровых лиц мужского пола, студентов технических вузов в возрасте от 19 до 22 лет, проводился тест М. Люшера в 8-цветном варианте. Установлено, что желтый цвет предпочитается испытуемыми чаще, чем отвергается (табл. 6.6).

Таблица 6.6

Разряд	Позиция желтого цвета								Сумма
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Эмпирические частоты	24	15	13	8	15	10	9	8	102

Вопрос

Можно ли утверждать, что распределение желтого цвета по восьми позициям у здоровых испытуемых отличается от равномерного распределения?

Решение

Для определения соответствия эмпирического распределения теоретическому (равномерному) можно использовать критерий Колмогорова. Для этого вносим экспериментальные данные в таблицу (табл. 6.7) и проводим стандартные вычисления.

Таблица 6.7

Позиция желтого цвета	Частота		Накопленная частота		d
	$f_э$	$f_т$	$F_э$	$F_т$	
1	24	12,75	24	12,75	11,25
2	15	12,75	39	25,50	13,50
3	13	12,75	52	38,25	***13,75***
4	8	12,75	60	51,00	9,00
5	15	12,75	75	63,75	11,25
6	10	12,75	85	76,50	8,50
7	9	12,75	94	89,25	4,75
8	8	12,75	102	102	0

Отсюда: $\lambda = \frac{d_{max}}{\sqrt{n}} = \frac{13,75}{\sqrt{102}} = 1,36$.

Вывод

Экспериментальное распределение не соответствует теоретическому (равномерному) распределению.

6.3. Биномиальное распределение

В отличие от нормального и равномерного распределений, описывающих поведение переменной в исследуемой выборке испытуемых, биномиальное распределение используется для иных целей. Оно служит для прогнозирования вероятности двух взаимоисключающих событий в некотором числе независимых друг от друга испытаний. Классический пример биномиального распределения — подбрасывание монеты, которая падает на твердую поверхность. Равновероятны два исхода (события): 1) монета падает «орлом» (ве-

роятность равна p) или 2) монета падает «решкой» (вероятность равна q). Если третьего исхода не дано, то $p = q = 0{,}5$ и $p + q = 1$. Используя формулу биномиального распределения, можно определить, например, какова вероятность того, что в 50 испытаниях (число подбрасываний монеты) последняя выпадет «орлом» 25 раз.

Для дальнейших рассуждений введем общепринятые обозначения:

n — общее число наблюдений;

i — число интересующих нас событий (исходов);

$n - i$ — число альтернативных событий;

p — эмпирически определенная (иногда — предполагаемая) вероятность интересующего нас события;

q — вероятность альтернативного события;

$P_n(i)$ — прогнозируемая вероятность интересующего нас события i по определенному числу наблюдений n.

Формула биномиального распределения:

$$P_n(i) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot p^i \cdot q^{n-i}. \tag{6.7}$$

В случае равновероятного исхода событий ($p = q$) можно использовать упрощенную формулу:

$$P_n(i) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot 0{,}5^n. \tag{6.8}$$

Рассмотрим три примера, иллюстрирующие использование формул биномиального распределения в психологических исследованиях.

Пример 1

Предположим, что 3 студента решают задачу повышенной сложности. Для каждого из них равновероятны 2 исхода: (+) — решение и (–) — нерешение задачи. Всего возможно 8 разных исходов ($2^3 = 8$).

Вероятность того, что ни один студент не справится с задачей, равна 1/8 (вариант 8); 1 студент справится с задачей: $P = 3/8$ (варианты 4, 6, 7); 2 студента — $P = 3/8$ (варианты 2, 3, 5) и 3 студента — $P = 1/8$ (вариант 1).

Студент	Варианты исходов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
A	+	+	+	+	–	–	–	–
B	+	+	–	–	+	+	–	–
C	+	–	+	–	+	–	+	–

Пример 2

Предположим, 5 студентов выполняют интеллектуальный тест повышенной сложности. Правильное выполнение теста «+», неправильное — «–». Каждый студент может иметь 2 возможных исхода (+ или –), причем вероятность каждого из этих исходов равна 0,5.

Студент	Вариант исхода				
	1	2	3	4	5
Возможные исходы	+ –	+ –	+ –	+ –	+ –

Необходимо определить вероятность того, что трое из пяти студентов успешно справятся с данной задачей.

Решение

Всего возможных исходов: $2^5 = 32$.

Общее число вариантов 3(+) и 2(–) составляет:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 10.$$

Следовательно, вероятность ожидаемого исхода равна $10/32 \approx 0{,}31$.

Пример 3

Считается, что число экстравертов и интровертов в однородной группе испытуемых является приблизительно одинаковым.

Задание

Определить вероятность того, что в группе из 10 случайных испытуемых обнаружится 5 экстравертов.

Решение

1. Вводим обозначения: $p = q = 0{,}5$; $n = 10$; $i = 5$; $P_{10}(5) = ?$

2. Используем упрощенную формулу (см. выше):

$$P_{10}(5) = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot 0{,}5^{10} = \frac{3628800}{120^2} \cdot 0{,}00098 = 0{,}246.$$

Вывод

Вероятность того, что среди 10 случайных испытуемых обнаружится 5 экстравертов, составляет 0,246.

Примечания:

1. Вычнслеине по формуле прн достаточно большом числе нспытаинй трудоемко, поэтому в этнх случаях рекомеидуется использовать таблицы биномнального распределеиня.

2. В некоторых случаях значеиия p и q можио задать изначальио, ио ие всегда. Как правило, они вычисляются по результатам предварительных испытаний (пилотажиых нсследоваиий).

3. В графическом изображении (в координатах $P_n(i) = f(i)$) биномиальиое распределение может иметь различиый вид: в случае $p = q$ распределение симметрично и иапоминает иормальиое распределение Гаусса; асимметрия распределеиия тем больше, чем больше разиица между вероятиостями p и q.

6.4. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона является частным случаем биномиального распределения, используемым при очень низкой вероятности интересующих нас событий. Другими словами, это распределение описывает вероятность редких событий. Формулой Пуассона можно пользоваться при $p < 0{,}01$ и $q \geq 0{,}99$.

Уравнение Пуассона является приближенным и описывается следующей формулой:

$$P_n(i) \approx \frac{\mu^i}{i!} \cdot e^{-\mu} = \frac{(\bar{p} \cdot n)^i}{i!} \cdot e^{-\bar{p} \cdot n}, \qquad (6.9)$$

где μ представляет собой произведение средней вероятности события и числа наблюдений.

В качестве примера рассмотрим алгоритм решения следующей задачи.

Пример

В течение нескольких лет в 21 крупной клинике России проводилось массовое обследование новорожденных на предмет заболевания младенцев болезнью Дауна (выборка в среднем составляла 1 000 новорожденных в каждой клинике). Были получены следующие данные:

Число клиник	11	6	2	1	1	0
Число заболеваний	0	1	2	3	4	5

Задания

1. Определить среднюю вероятность заболевания (в пересчете на число новорожденных).

2. Определить, на какое число новорожденных в среднем приходится одно заболевание.

3. Определить вероятность того, что среди 100 случайно выбранных новорожденных обнаружится 2 младенца с болезнью Дауна.

Решение

1. Определяем среднюю вероятность заболевания. При этом мы должны руководствоваться следующими рассуждениями. Болезнь Дауна зарегистрирована лишь в 10 клиниках из 21. В 11 клиниках заболеваний не обнаружено, в 6 клиниках зарегистрировано по 1 случаю, в 2 клиниках — 2 случая, в 1 клинике — 3 и в 1 клинике — 4 случая болезни. 5 случаев заболевания не было обнаружено ни в одной клинике. Для того чтобы определить среднюю вероятность заболевания, необходимо общее число случаев ($6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 17$) разделить на общее число новорожденных (21 000):

$$\overline{p} = \frac{17}{21000} = 0{,}00081.$$

2. Число новорожденных, на которое приходится одно заболевание, является величиной, обратной средней вероятности, т. е. равно общему числу новорожденных, отнесенному к числу зарегистрированных случаев:

$$N = \frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{0{,}00081} = 1235\,.$$

3. Подставляем значения $p = 0{,}00081$, $n = 100$ и $i = 2$ в формулу Пуассона:

$$P_{100}(2) \approx \frac{(0{,}00081 \cdot 100)^2}{2!} \cdot e^{-0{,}00081 \cdot 100} = 0{,}00328 \cdot 0{,}922 = 0{,}003.$$

Ответ

Вероятность того, что среди 100 случайно выбранных новорожденных обнаружится 2 младенца с болезнью Дауна, составляет 0,003 (0,3 %).

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ

Задача 6.1

Задание

Пользуясь данными задачи 5.1 по времени сенсомоторной реакции, вычислить асимметрию и эксцесс распределения ВР.

Задача 6.2

200 учащихся выпускных классов были протестированы на уровень интеллектуальности (IQ). После нормирования распределения IQ по стандартному отклонению были получены следующие результаты:

Классовый интервал, σ	Частота IQ	Классовый интервал, σ	Частота IQ
–4,0 ÷ –3,5	0	0 ÷ 0,5	31
–3,5 ÷ –3,0	2	0,5 ÷ 1,0	14
–3,0 ÷ –2,5	6	1,0 ÷ 1,5	4
–2,5 ÷ –2,0	12	1,5 ÷ 2,0	2
–2,0 ÷ –1,5	18	2,0 ÷ 2,5	1
–1,5 ÷ –1,0	28	2,5 ÷ 3,0	1
–1,0 ÷ –0,5	39	3,0 ÷ 3,5	0
–0,5 ÷ 0	42	3,5 ÷ 4,0	0

Задание

Пользуясь критериями Колмогорова и хи-квадрат, определить, соответствует ли полученное распределение показателей IQ нормальному.

Задача 6.3

У взрослого испытуемого (мужчина 25 лет) исследовалось время простой сенсомоторной реакции (ВР) в ответ на звуковой стимул с постоянной частотой в 1 кГц и интенсивностью 40 дБ. Стимул предъявлялся стократно с интервалами 3—5 секунд. Отдельные значения ВР по 100 повторностям распределились следующим образом:

Время реакции, мс	100 ÷ 110	110 ÷ 120	120 ÷ 130	130 ÷ 140	140 ÷ 150	150 ÷ 160	160 ÷ 170	170 ÷ 180
Число испытуемых	9	15	28	30	8	5	3	2

Задание

1. Построить частотную гистограмму распределения ВР; определить среднее значение ВР и величину стандартного отклонения.
2. Рассчитать коэффициент асимметрии и показатель эксцесса распределения ВР; на основании полученных значений *As* и *Ex* сделать вывод о соответствии или несоответствии данного распределения нормальному.

Задача 6.4

В 1998 г. в Нижнем Тагиле окончили школы с золотыми медалями 14 человек (5 юношей и 9 девушек), с серебряными — 26 человек (8 юношей и 18 девушек).

Вопрос

Можно ли утверждать, что девушки получают медали чаще, чем юноши?

Примечание. Соотношение числа юношей и девушек в генеральной совокупности считать равным.

Задача 6.5

Считается, что число экстравертов и интровертов в однородной группе испытуемых является приблизительно одинаковым.

Задание

Определить вероятность того, что в группе из 10 случайно отобранных испытуемых обнаружится 0, 1, 2, ..., 10 экстравертов.

Построить графическое выражение распределения вероятностей обнаружения 0, 1, 2, ..., 10 экстравертов в данной группе.

Задача 6.6

Задание

Рассчитать вероятность $P_n(i)$ функции биномиального распределения при $p = 0{,}3$ и $q = 0{,}7$ для значений $n = 5$ и $i = 0, 1, 2, ..., 5$. Построить графическое выражение зависимости $P_n(i) = f(i)$.

Задача 6.7

В последние годы среди определенной части населения утвердилась вера в астрологические прогнозы. По результатам предварительных опросов установлено, что в астрологию верит около 15 % населения.

Задание

Определить вероятность того, что среди 10 случайно выбранных респондентов окажется 1, 2 или 3 человека, верящих в астрологические прогнозы.

Задача 6.8

В 42 общеобразовательных школах г. Екатеринбурга и Свердловской области (общее число учащихся 12 260 человек) за несколько лет было выявлено следующее число случаев психических заболеваний среди школьников:

Число школ (n)	22	13	4	2	1	0
Число случаев (i)	0	1	2	3	4	5

Задание

Пусть будет выборочно обследовано 1 000 школьников. Рассчитать, какова вероятность того, что среди этих школьников будет выявлен 1, 2 или 3 психически больных ребенка?

РАЗДЕЛ 7

МЕРЫ РАЗЛИЧИЙ

7.1. Постановка проблемы

Предположим, что мы имеем две независимые друг от друга выборки испытуемых x и y. *Независимыми* выборки считаются тогда, когда один и тот же субъект (испытуемый) фигурирует только в одной выборке. Задача состоит в том, чтобы сравнить между собой эти выборки (два ряда переменных) на предмет их различий. Естественно, что как бы ни были близки между собой значения переменных в первой и второй выборке, какие-то, пусть даже незначительные, различия между ними будут обнаруживаться. С точки же зрения математической статистики нас интересует вопрос, являются ли различия между этими выборками статистически достоверными (статистически значимыми) или недостоверными (случайными).

Наиболее распространенными критериями достоверности различий между выборками являются параметрические меры различий — ***критерий Стьюдента*** и ***критерий Фишера***. В ряде случаев используются непараметрические критерии — ***критерий Q Розенбаума***, ***U-критерий Манна — Уитни*** и др. Особое место занимает *угловое преобразование Фишера* φ*, позволяющее сравнивать друг с другом значения, выраженные в процентах (процентных долях). И, наконец, как частный случай для сравнения выборок могут быть использованы критерии, характеризующие форму распределений выборок — *критерий* χ^2 *Пирсона* и *критерий* λ *Колмогорова — Смирнова*.

В целях наилучшего усвоения данной темы мы поступим следующим образом. Одну и ту же задачу мы решим четырьмя методами с использованием четырех различных критериев — Розенбаума, Манна — Уитни, Стьюдента и Фишера.

Условие задачи

30 студентов (14 юношей и 16 девушек) во время экзаменационной сессии протестированы по тесту Спилбергера на уровень реактивной тревожности. Получены следующие результаты (табл. 7.1):

Таблица 7.1

Испытуемые	Уровень реактивной тревожности															
Юноши	32	34	28	43	35	26	41	32	40	39	42	38	44	33		
Девушки	34	30	37	43	42	44	46	36	45	28	34	41	40	35	42	39

Задание

Определить, являются ли статистически достоверными различия уровня реактивной тревожности у юношей и девушек.

Задача представляется вполне типичной для психолога, специализирующегося в области педагогической психологии: кто более остро переживает экзаменационный стресс — юноши или девушки? Если различия между выборками статистически достоверны, то существуют значимые половые различия в данном аспекте; если различия случайны (статистически недостоверны), от данного предположения следует отказаться.

7.2. Непараметрический критерий Q Розенбаума

Q-критерий Розенбаума основан на сравнении «наложенных» друг на друга ранжированных рядов значений двух независимых переменных. При этом не анализируется характер распределения признака внутри каждого ряда — в данном случае имеет значение лишь ширина неперекрывающихся участков двух ранжированных

рядов. При сравнении между собой двух ранжированных рядов переменных возможны 3 варианта:

1. Ранжированные ряды x и y не имеют области перекрытия, т. е. все значения первого ранжированного ряда (x) больше всех значений второго ранжированного ряда (y):

x_{min} ———— x_{max}

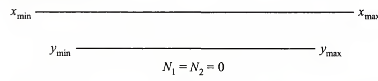
N_2

y_{min} ———— y_{max}

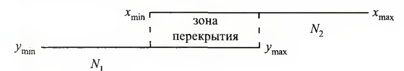
N_1

В данном случае различия между выборками, определяемые по любому статистическому критерию, безусловно достоверны, и использование критерия Розенбаума не требуется. Тем не менее на практике такой вариант встречается исключительно редко.

2. Ранжированные ряды полностью накладываются друг на друга (как правило, один из рядов находится внутри другого), неперекрывающиеся зоны отсутствуют. В данном случае критерий Розенбаума неприменим.



3. Имеется зона перекрытия рядов, а также две неперекрывающиеся области (N_1 и N_2), относящиеся к *разным* ранжированным рядам (обозначим x — ряд, сдвинутый в сторону больших, y — в сторону меньших значений):



Данный случай является типичным для использования критерия Розенбаума, при этом необходимо соблюдать следующие условия:

1. Объем каждой выборки должен быть не менее 11.

2. Объемы выборок не должны существенно отличаться друг от друга.

Критерий Q Розенбаума соответствует числу неперекрывающихся значений: $Q = N_1 + N_2$. Вывод о достоверности различий между выборками делается в случае, если $Q > Q_{кр}$. При этом значения $Q_{кр}$ находятся в специальных таблицах (см. прил., табл. 8).

Вернемся к нашей задаче. Введем обозначения: x — выборка девушек, y — выборка юношей. Для каждой выборки строим ранжированный ряд:

x: 28 30 34 34 35 36 37 39 40 41 42 42 43 44 45 46
y: 26 28 32 32 33 34 35 38 39 40 41 42 43 44

Подсчитываем число значений в неперекрывающихся областях ранжированных рядов. В ряду x неперекрывающимися являются значения 45 и 46, т. е. $N_1 = 2$; в ряду y только одно неперекрывающееся значение 26, т. е. $N_2 = 1$. Отсюда $Q = N_1 + N_2 = 1 + 2 = 3$.

По табл. 8 (см. прил.) находим, что $Q_{кр} = 7$ (для уровня значимости 0,95) и $Q_{кр} = 9$ (для уровня значимости 0,99).

Вывод

Поскольку $Q < Q_{кр}$, то по критерию Розенбаума различия между выборками не являются статистически достоверными.

Примечание. Критерий Розенбаума может использоваться независимо от характера распределения переменных, т. е. в данном случае отпадает необходимость использования критериев χ^2 Пирсона и λ Колмогорова для определения типа распределений в обеих выборках.

7.3. *U*-критерий Манна — Уитни

В отличие от критерия Розенбаума, *U*-критерий Манна — Уитни основан на определении зоны перекрытия между двумя ранжированными рядами, т. е. чем меньше зона перекрытия, тем достовернее различия между выборками. Для этого используется специальная процедура преобразования интервальных шкал в ранговые.

Рассмотрим алгоритм вычислений по *U*-критерию на примере предыдущей задачи (см. подразд. 7.2).

Для более экономичной работы рекомендуется построить рабочую таблицу (табл. 7.2).

Таблица 7.2

x, y	R_{xy}	R_{xy}*	R_x	R_y
1	2	3	4	5
26	1	1		*1*
28	2	2,5	2,5	
28	3	2,5		*2,5*
30	4	4	4	
32	5	5,5		*5,5*
32	6	5,5		*5,5*
33	7	7		*7*
34	8	9	9	
34	9	9	9	
34	10	9		*9*
35	11	11,5	11,5	
35	12	11,5		*11,5*
36	13	13	13	
37	14	14	14	
38	15	15		*15*
39	16	16,5	16,5	
39	17	16,5		*16,5*
40	18	18,5	18,5	
40	19	18,5		*18,5*
41	20	20,5	20,5	
41	21	20,5		*20,5*
42	22	23	23	
42	23	23	23	
42	24	23		*23*
43	25	25,5	25,5	
43	26	25,5		*25,5*
44	27	27,5	27,5	
44	28	27,5		*27,5*
45	29	29	29	
46	30	30	30	
		Σ	276,5	188,5

Порядок заполнения таблицы и соответствующих вычислений:

1. Из двух независимых выборок строим единый ранжированный ряд. В данном случае значения для обеих выборок идут «вперемешку», столбец 1 (x, y). В целях упрощения дальнейшей рабо-

ты (в том числе и в компьютерном варианте) следует значения для разных выборок отмечать разным шрифтом (или разным цветом) с учетом того, что в дальнейшем мы будем их разносить по разным столбцам.

2. Преобразуем интервальную шкалу значений в порядковую (для этого переобозначаем все значения ранговыми числами от 1 до 30, столбец 2 (R_{xy})).

3. Вводим поправки на связанные ранги (одинаковые значения переменной обозначаются одним и тем же рангом при условии, что сумма рангов не изменяется, столбец 3 (R_{xy}*). На этом этапе рекомендуется подсчитать суммы рангов во 2-м и 3-м столбце (если все поправки введены верно, то эти суммы должны быть равны).

4. Разносим ранговые числа в соответствии с их принадлежностью к той или иной выборке (столбцы 4 и 5 (R_x и R_y)).

5. Проводим вычисления по формуле:

$$U = n_x n_y + \frac{n_x(n_x + 1)}{2} - T_x, \qquad (7.1)$$

где T_x — наибольшая из ранговых сумм; n_x и n_y — соответственно объемы выборок. В данном случае следует иметь в виду, что если $T_x < T_y$, то обозначения x и y следует сменить на обратные.

6. Сравниваем полученное значение с табличным (см. прил., табл. 9). Вывод о достоверности различий между двумя выборками делается в случае, если $U_{эксп} < U_{кр}$.

В нашем примере $U = 14 \cdot 16 + \frac{16 \cdot 17}{2} - 276{,}5 = 83{,}5$;

$$U_{эксп} = 83{,}5 > U_{кр} = 71.$$

Вывод

Различия между двумя выборками по критерию Манна — Уитни не являются статистически достоверными.

Примечания:

1. Критерий Манна — Уитни не имеет практически никаких граиичений; минимальиые объемы сравниваемых выборок — 2 и 5 человек (см. прил., табл. 9).

2. Аиалогично критерию Розенбаума критерий Манна — Уитии может быть использован применительио к любым выборкам независимо от характера распределения.

7.4. Критерий Стьюдента

В отличие от критериев Розенбаума и Манна — Уитни, критерий *t* Стьюдента является параметрическим, т. е. основан на определении основных статистических показателей — средних значений в каждой выборке ($\bar{x}$ и $\bar{y}$) и их дисперсий (σ_x^2 и σ_y^2), рассчитываемых по стандартным формулам (см. разд. 5).

Использование критерия Стьюдента предполагает соблюдение следующих условий:

1. Распределения значений для обеих выборок должны соответствовать закону нормального распределения (см. разд. 6).

2. Суммарный объем выборок должен быть не менее 30 (для $\beta_1 = 0{,}95$) и не менее 100 (для $\beta_2 = 0{,}99$).

3. Объемы двух выборок не должны существенно отличаться друг от друга (не более чем в $1{,}5 \div 2$ раза).

Идея критерия Стьюдента достаточно проста. Предположим, что значения переменных в каждой из выборок распределяются по нормальному закону, т. е. мы имеем дело с двумя нормальными распределениями, отличающимися друг от друга по средним значениям и дисперсии (соответственно $\bar{x}$ и σ_x^2, $\bar{y}$ и σ_y^2, см. рис. 7.1).

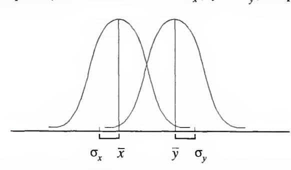


Рис. 7.1. Оценка различий между двумя независимыми выборками: $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — средние значения выборок *x* и *y*; σ_x и σ_y — стандартные отклонения

Нетрудно понять, что различия между двумя выборками будут тем больше, чем больше разность между средними значениями и чем меньше их дисперсии (или стандартные отклонения).

В случае независимых выборок коэффициент Стьюдента определяют по формуле:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}, \qquad (7.2)$$

где n_x и n_y — соответственно численность выборок x и y.

После вычисления коэффициента Стьюдента в таблице стандартных (критических) значений t (см. прил., табл. 10) находят величину, соответствующую числу степеней свободы $\nu = n_x + n_y - 2$, и сравнивают ее с рассчитанной по формуле. Если $t_э \leq t_{кр}$, то гипотезу о достоверности различий между выборками отвергают, если же $t_э > t_{кр}$, то ее принимают. Другими словами, выборки достоверно отличаются друг от друга, если вычисленный по формуле коэффициент Стьюдента больше табличного значения для соответствующего уровня значимости.

В рассмотренной нами ранее задаче (см. табл. 7.1) вычисление средних значений и дисперсий дает следующие значения: $x_{ср} = 38{,}5$; $\sigma_x{}^2 = 28{,}40$; $y_{ср} = 36{,}2$; $\sigma_y{}^2 = 31{,}72$.

Можно видеть, что среднее значение тревожности в группе девушек выше, чем в группе юношей. Тем не менее эти различия настолько незначительны, что вряд ли они являются статистически значимыми. Разброс значений у юношей, напротив, несколько выше, чем у девушек, но различия между дисперсиями также невелики.

Подставляем значения в формулу: $t = \frac{38{,}5 - 36{,}2}{\sqrt{\frac{28{,}40}{16} + \frac{31{,}72}{14}}} = 1{,}14$.

Вывод

$t_э = 1{,}14 < t_{кр} = 2{,}05$ ($\beta_1 = 0{,}95$). Различия между двумя сравниваемыми выборками не являются статистически достоверными. Данный вывод вполне согласуется с таковым, полученным при использовании критериев Розенбаума и Манна — Уитни.

Другой способ определения различий между двумя выборками по критерию Стьюдента состоит в вычислении доверительного интервала стандартных отклонений. Доверительным интервалом

называется среднеквадратичное (стандартное) отклонение, деленное на корень квадратный из объема выборки и умноженное на стандартное значение коэффициента Стьюдента для $n-1$ степеней свободы (соответственно $\frac{t_{n-1} \cdot \sigma_x}{\sqrt{n_x}}$ и $\frac{t_{n-1} \cdot \sigma_y}{\sqrt{n_y}}$).

Примечание. Величииа $\sigma/\sqrt{n_x} = m_x$ иазывается среднеквадратичиой ошибкой (см. разд. 5). Следовательио, доверительный иитервал есть средиеквадратичиая ошибка, умиожеииая иа коэффициеит Стьюдеита для даииого объема выборки, где число степеией свободы $\nu = n - 1$, и заданного уровия зиачимости.

Две независимые друг от друга выборки считаются достоверно различающимися, если доверительные интервалы для этих выборок не перекрываются друг другом. В нашем случае мы имеем для первой выборки 38,5 ± 2,84, для второй — 36,2 ± 3,38.

Следовательно, случайные вариации x_i лежат в диапазоне 35,66 ÷ 41,34, а вариации y_i — в диапазоне 32,82 ÷ 39,58. На основании этого можно констатировать, что различия между выборками x и y статистически недостоверны (диапазоны вариаций перекрываются друг другом). При этом следует иметь в виду, что ширина зоны перекрытия в данном случае не имеет значения (важен лишь сам факт перекрытия доверительных интервалов).

Метод Стьюдента для зависимых друг от друга выборок (например, для сравнения результатов, полученных при повторном тестировании на одной и той же выборке испытуемых) используют достаточно редко, поскольку для этих целей существуют другие, более информативные статистические приемы (см. разд. 10). Тем не менее для данной цели в первом приближении можно использовать формулу Стьюдента следующего вида:

$$t = \frac{\sum(x_i - y_i)}{\sqrt{\dfrac{n \cdot \sum(x_i - y_i)^2 - [\sum(x_i - y_i)]^2}{(n-1)}}}. \quad (7.3)$$

Полученный результат сравнивают с табличным значением для $n-1$ степеней свободы, где n — число пар значений x и y. Результаты сравнения интерпретируются точно так же, как и в случае вычисления различий мсжду двумя независимыми выборками.

7.5. Критерий Фишера

Критерий Фишера (F) основан на том же принципе, что и критерий Стьюдента, т. е. предполагает вычисление средних значений и дисперсий в сравниваемых выборках. Чаще всего используется при сравнении между собой неравноценных по объему (разных по численности) выборок. Критерий Фишера является несколько более жестким, чем критерий Стьюдента, а потому более предпочтителен в тех случаях, когда возникают сомнения в достоверности различий (например, если по критерию Стьюдента различия достоверны при нулевом и недостоверны при первом уровне значимости).

Формула Фишера выглядит следующим образом:

$$F = \frac{n_x \cdot n_y}{n_x + n_y} \cdot \frac{d^2}{\sigma_z^2}, \qquad (7.4)$$

где $d^2 = (\bar{x} - \bar{y})^2$ и $\sigma_z^2 = \frac{\sigma_x^2(n_x - 1) + \sigma_y^2(n_y - 1)}{n_x + n_y - 2}$. (7.5, 7.6)

В рассматриваемой нами задаче $d^2 = 5{,}29$; $\sigma_z^2 = 29{,}94$.

Подставляем значения в формулу: $F = \frac{16 \cdot 14}{16 + 14} \cdot \frac{5{,}29}{29{,}94} = 1{,}32$.

В табл. 11 (см. прил.) находим, что для уровня значимости $\beta_1 = 0{,}95$ и $\nu = n_x + n_y - 2 = 28$ критическое значение составляет 4,20.

Вывод

$F = 1{,}32 < F_{кр} = 4{,}20$. Различия между выборками статистически недостоверны.

Примечание. При использовании критерия Фишера должны соблюдаться те же условия, что и для критерия Стьюдента (см. подразд. 7.4). Тем не менее допускается различие в численности выборок более чем в два раза.

Таким образом, при решении одной и той же задачи четырьмя различными методами с использованием двух непараметрических и двух параметрических критериев мы пришли к однозначному выводу о том, что различия между группой девушек и груп-

пой юношей по уровню реактивной тревожности недостоверны (т. е. находятся в пределах случайных вариаций). Однако могут встретиться и такие случаи, когда сделать однозначный вывод не представляется возможным: одни критерии дают достоверные, другие — недостоверные различия. В этих случаях приоритет отдается параметрическим критериям (при условии достаточности объема выборок и нормального распределения исследуемых величин).

7.6. Критерий φ* — угловое преобразование Фишера

Критерий φ* Фишера предназначен для сопоставления двух выборок по частоте встречаемости интересующего исследователя эффекта. Он оценивает достоверность различий между процентными долями двух выборок, в которых зарегистрирован интересующий нас эффект. Допускается также сравнение процентных соотношений и в пределах одной выборки.

Суть углового преобразования Фишера состоит в переводе процентных долей в величины центрального угла, который измеряется в радианах. Большей процентной доле будет соответствовать больший угол φ, а меньшей доле — меньший угол, но отношения здесь нелинейные:

$$\varphi = 2\arcsin\left(\sqrt{P}\right), \qquad (7.7)$$

где P — процентная доля, выраженная в долях единицы.

При увеличении расхождения между углами φ_1 и φ_2 и увеличении численности выборок значение критерия возрастает.

Критерий Фишера вычисляется по следующей формуле:

$$\varphi^* = \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}, \qquad (7.8)$$

где φ_1 — угол, соответствующий большей процентной доле; φ_2 — угол, соответствующий меньшей процентной доле; n_1 и n_2 — соответственно объем первой и второй выборок.

Вычисленное по формуле значение сравнивается со стандартным ($\varphi^*_{ст} = 1{,}64$ для $\beta_1 = 0{,}95$ и $\varphi^*_{ст} = 2{,}31$ для $\beta_2 = 0{,}99$). Различия между двумя выборками считаются статистически достоверными, если $\varphi^* > \varphi^*_{ст}$ для данного уровня значимости.

Пример

Нас интересует, различаются ли между собой две группы студентов по успешности выполнения достаточно сложной задачи. В первой группе из 20 человек с ней справилось 12 студентов, во второй — 10 человек из 25.

Решение

1. Вводим обозначения: $n_1 = 20$, $n_2 = 25$.

2. Вычисляем процентные доли P_1 и P_2: $P_1 = 12/20 = 0{,}6$ (60 %), $P_2 = 10/25 = 0{,}4$ (40 %).

3. В табл. 12 (см. прил.) находим соответствующие процентным долям значения φ: $\varphi_1 = 1{,}772$, $\varphi_2 = 1{,}369$.

Отсюда: $\varphi^* = (1{,}772 - 1{,}369) \cdot \sqrt{\dfrac{20 \cdot 25}{20 + 25}} = 1{,}34$.

Вывод

Различия между группами не являются статистически достоверными, поскольку $\varphi^* < \varphi^*_{ст}$ для 1-го и тем более для 2-го уровня значимости.

7.7. Использование критерия χ^2 Пирсона и критерия λ Колмогорова для оценки различий между двумя выборками

Использование критерия χ^2 для оценки соответствия экспериментальных распределений теоретическим (нормальному или равномерному) подробно обсуждалось в разд. 6. Тот же критерий может использоваться и для сравнения двух эмпирических распределений на предмет достоверности различий между ними.

Пример

В опытах с участием 100 испытуемых (50 мужчин и 50 женщин) регистрировалось время простой сенсомоторной реакции (ВСМР)

в ответ на звуковой стимул. Получены следующие результаты (табл. 7.3):

Таблица 7.3

ВСМР, с							
Классовый интервал	0,10 ÷ 0,12	0,12 ÷ 0,14	0,14 ÷ 0,16	0,16 ÷ 0,18	0,18 ÷ 0,20	0,20 ÷ 0,22	0,22 ÷ 0,24
Частота встречаемости ВСМР							
Мужчины	2	15	26	5	2	0	0
Женщины	0	12	20	8	7	2	1

Задание

Пользуясь критерием χ^2 Пирсона, определить, достоверны ли различия распределений ВСМР у мужчин и женщин.

Решение

1. Строим рабочую таблицу для предварительных расчетов (табл. 7.4):

Таблица 7.4

Обозначение интервала	Классовый интервал, с	Эмпирическая частота		Сумма эмпирических частот	Теоретическая частота
		мужчины	женщины		
1	2	3	4	5	6
A	0,10 ÷ 0,12	2	0	2	1
B	0,12 ÷ 0,14	15	12	27	13,5
C	0,14 ÷ 0,16	26	20	46	23
D	0,16 ÷ 0,18	5	8	13	6,5
E	0,18 ÷ 0,20	2	7	9	4,5
F	0,20 ÷ 0,22	0	2	2	1
G	0,22 ÷ 0,24	0	1	1	0,5
Сумма		50	50	100	

Столбец 1 служит исключительно для экономии: в дальнейшем мы не будем указывать границы классовых интервалов — нам будет достаточно того, что распределение включает в себя 7 количественных градаций (классов). В столбцах 2, 3 и 4 отражены данные из условия задачи. Столбец 5 служит для дальнейших вычислений.

Теоретические частоты (столбец 6) в данном случае вычисляются следующим образом:

1) при равноценных выборках теоретическая частота в каждом классе вычисляется как среднее арифметическое двух эмпирических частот;

2) если объемы выборок различны, то теоретическая частота вычисляется как сумма эмпирических частот в данной строке, умноженная на сумму в каждом столбце (по вертикали) и отнесенная к общей сумме частот.

Для дальнейших вычислений вносим данные в табл. 7.5:

Таблица 7.5

Интервал	Мужчины			Женщины		
	$f_э$	$f_т$	$\frac{(f_э - f_т)^2}{f_т}$	$f_э$	$f_т$	$\frac{(f_э - f_т)^2}{f_т}$
1	2	3	4	5	6	7
A	2	1	1,00	0	1	1,00
B	15	13,5	0,17	12	13,5	0,17
C	26	23	0,39	20	23	0,39
D	5	6,5	0,35	8	6,5	0,35
E	2	4,5	1,39	7	4,5	1,39
F	0	1	1,00	2	1	1,00
G	0	0,5	0,50	1	0,5	0,50

Можно видеть, что это — типичная таблица для вычисления критерия χ^2 (см. разд. 6). Значения в столбцах 3 и 6 для мужчин и женщин одинаковы; это естественно, так как теоретические частоты соответствуют средним значениям экспериментальных частот в каждой выборке. Тем не менее χ^2 следует рассчитывать, суммируя все значения в столбцах 4 и 6 (т. е. по обеим выборкам).

В итоге получаем $\chi^2 = 9{,}6$. В табл. 6 (см. прил.) для уровня значимости 0,95 и $\nu = N - 1 = 6$ находим значение $\chi^2_{кр}$, равное 12,6.

Вывод

Различия между распределениями не являются статистически достоверными.

Для решения задачи можно использовать критерий Колмогорова в несколько иной модификации, нежели при сравнении экспери-

ментального распределения с теоретическим. Для этого оформляем рабочую таблицу (табл. 7.6):

Таблица 7.6

Интервал	Экспериментальная частота		Накопленная частота				d
			экспериментальная		относительная		
	$f_м$	$f_ж$	$F_м$	$F_ж$	$F_м^*$	$F_ж^*$	
1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	0	2	0	0,04	0	0,04
B	15	12	17	12	0,34	0,24	0,10
C	26	20	43	32	0,86	0,64	***0,22***
D	5	8	48	40	0,96	0,80	0,16
E	2	7	50	47	1,00	0,94	0,06
F	0	2	50	49	1,00	0,98	0,02
G	0	1	50	50	1,00	1,00	0

Рекомендуется следующий порядок вычислений:

1. В столбце 1 — условные обозначения временных интервалов; в столбцах 2 и 3 — экспериментальные частоты мужчин (2) и женщин (3).

2. В столбцах 4 и 5 — накопленные частоты для мужчин (4) и женщин (5). Напомним, что накопленные частоты вычисляются путем простого суммирования частот от первого до последнего класса.

3. В столбцах 6 и 7 — относительные накопленные частоты ($F^* = F/n$). Другими словами, каждая накопленная частота в столбцах 4 и 5 делится на 50.

4. Вычисляем критерий λ по формуле Колмогорова в следующей модификации:

$$\lambda = d_{\max} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}. \qquad (7.9)$$

В нашем случае:

$$\lambda = 0{,}22 \cdot \sqrt{\frac{50 \cdot 50}{50 + 50}} = 1{,}10.$$

Вывод

Распределения отличаются друг от друга с вероятностью 0,822 (см. прил., табл. 7). Другими словами, соответствие между распределениями можно констатировать лишь с вероятностью 0,178.

Чем можно объяснить причины несоответствия результатов, полученных с помощью критериев χ^2 и λ? По-видимому, критерий Колмогорова, основанный на накоплении эмпирических частот, является более чувствительным к различиям и позволяет зафиксировать те тонкие нюансы, которые недоступны критерию Пирсона. Таким образом, можно усомниться в том, что различий вообще не существует. Кстати говоря, более мощные критерии (Стьюдента и Фишера), которые также можно применить к решению данной задачи, дают достоверные различия между двумя выборками на уровне значимости 0,95.

В заключение следует констатировать, что оценка различий между двумя распределениями по вышеупомянутым критериям может быть использована лишь в случае отсутствия достаточной информации о каждом конкретном значении переменной в выборках.

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ

Задача 7.1

40 студентов (20 юношей и 20 девушек) обследованы на уровень нейротизма — эмоциональной стабильности по тесту Айзенка. Получены следующие результаты:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Юноши	10	12	5	9	6	7	11	8	7	4	9	12	14	8	6	7	11	9	10	8
Девушки	5	9	9	13	8	8	10	7	13	11	10	11	10	13	8	10	9	16	13	11

Задание

Определить достоверность различий по уровню нейротизма у юношей и девушек, выбрав один или несколько критериев, адекватных условию задачи.

Задача 7.2

В психофизиологическом эксперименте 29 юношей и 27 девушек были протестированы по методике РДО (реакция на движущийся объект). В числе показателей использовался такой критерий, как величина средней ошибки S остановки движущейся точки на линии. Получены следующие значения S (в миллисекундах) для двух групп испытуемых:

Юиоши						Девушки					
№	S	№	S	№	S	№	S	№	S	№	S
1	37	11	41	21	32	1	87	11	41	21	24
2	31	12	44	22	24	2	41	12	21	22	21
3	32	13	26	23	32	3	17	13	37	23	21
4	26	14	29	24	24	4	46	14	27	24	51
5	37	15	40	25	23	5	59	15	37	25	52
6	24	16	40	26	33	6	17	16	44	26	23
7	18	17	30	27	29	7	33	17	38	27	52
8	46	18	39	28	38	8	23	18	41		
9	59	19	32	29	24	9	30	19	22		
10	19	20	21			10	40	20	40		

Задание

Определить достоверность различий между показателями РДО для юношей и девушек, выбрав адекватный критерий обработки результатов.

Задача 7.3

Первоклассники одной из средних школ (12 мальчиков и 10 девочек) были протестированы по детскому тесту Д. Векслера на уровень интеллекта. Результаты тестирования (индивидуальные значения IQ) представлены в таблице.

Испытуемый	Пол	IQ	Испытусмый	Пол	IQ
1	м	85	12	м	91
2	м	78	13	д	115
3	м	138	14	д	112

Испытуемый	Пол	IQ	Испытуемый	Пол	IQ
4	м	86	15	д	98
5	м	79	16	д	93
6	м	105	17	д	97
7	м	95	18	д	101
8	м	94	19	д	117
9	м	100	20	д	102
10	м	134	21	д	92
11	м	87	22	д	111

Задание

Проанализировать полученные результаты на предмет половых различий в уровне интеллекта детей.

Задача 7.4

С помощью цветового теста отношений (ЦТО) были исследованы семейные отношения у мужчин-невротиков (38 человек). Оказалось, что 74 % мужчин ассоциируют свою жену с одним из светлых цветов и лишь 26 % — с темным. Себя ассоциируют со светлыми цветами лишь 31 % мужчин, остальные 68 % — с темными.

Вопрос

Можно ли на основании приведенных выше данных утверждать, что в восприятии семьи мужчинами-невротиками наблюдается выраженная асимметрия: качества активного, доминантного, «светлого» начала больные приписывают жене, а себе оставляют пассивную, страдательную роль?

Задача 7.5

Американский исследователь Стеннет изучал связь между полом и количеством пропусков детского сада. Он получил следующие данные: более 20 дней в году пропустили 29 % мальчиков и 27 % девочек. Всего в его исследовании приняли участие 873 мальчика и 837 девочек.

Вопрос

Можно ли считать, что мальчики пропускают детский сад чаще, чем девочки?

Задача 7.6

В двух студенческих выборках ($n_1 = 27$, $n_2 = 23$) исследовался коэффициент интеллекта (IQ). Получены следующие результаты:

Группа 1				Группа 2			
№	IQ	№	IQ	№	IQ	№	IQ
1	119	15	103	1	110	13	107
2	86	16	107	2	98	14	101
3	100	17	78	3	84	15	87
4	93	18	110	4	102	16	97
5	108	19	98	5	114	17	91
6	117	20	84	6	85	18	83
7	82	21	111	7	101	19	113
8	100	22	98	8	110	20	70
9	86	23	84	9	95	21	108
10	129	24	102	10	89	22	88
11	104	25	92	11	105	23	103
12	88	26	88	12	92		
13	113	27	104				
14	89						

Задание

Определить, достоверны ли различия распределений IQ в двух студенческих группах.

Задача 7.7

С помощью цветового теста отношений протестированы 38 человек с депрессивными симптомами и 50 человек без каких-либо выраженных психиатрических симптомов. Оказалось, что свое настроение ассоциируют с яркими цветами (красный, желтый, зеленый) 40 % здоровых и 5 % депрессивных испытуемых. Свое прошлое ассоциируют с аналогичными цветами 14 % больных и 22 % здоровых.

Задание

Определить достоверность различий между данными группами испытуемых.

РАЗДЕЛ 8
МЕРЫ СВЯЗИ

8.1. Постановка проблемы

Многие психологические черты, свойства, признаки не являются независимыми, а определенным образом взаимосвязаны между собой. Поэтому психологу часто приходится иметь дело с выявлением наличия и характера связи между этими признаками, свойствами, чертами. Это позволяет в известной степени минимизировать число изучаемых признаков, объединяя их в более крупные конгломераты, особенно в тех случаях, когда число таких признаков достаточно велико.

В математическом смысле задача состоит в нахождении связи между двумя рядами переменных (x_i и y_i), измеренных на одной и той же выборке испытуемых. О наличии связи (корреляции) между этими переменными можно говорить в тех случаях, когда изменение величины x ведет к закономерному изменению величины y и если характер изменений является предсказуемым.

8.2. Представление данных

Данные о связи двух переменных могут быть представлены либо графически (в виде диаграмм рассеивания), либо путем вычисления коэффициентов корреляции по соответствующим формулам.

В графическом изображении каждый испытуемый может быть представлен точкой в координатах $y = f(x)$, причем величины x_i и y_i соответствуют значениям двух исследуемых признаков. Выборка

испытуемых в этих координатах представляет собой облако рассеивания точек, которое может иметь различную форму (рис. 8.1).



Рис. 8.1. Графическое представление связи между переменными

При наличии прямой (положительной) связи между переменными облако рассеивания имеет более или менее уплощенную эллиптическую форму, длинная ось которого направлена вправо и вверх. Другими словами, при возрастании значения одной переменной имеется тенденция к увеличению другой переменной.

В случае отрицательной связи между переменными длинная ось облака рассеивания направлена вправо вниз, т. е. увеличение значений одной переменной соответствует закономерному снижению значений другой.

Наконец, если облако рассеивания имеет округлую форму, то можно предположить, что корреляция между переменными отсутствует или, по крайней мере, она весьма незначительна.

В психологии используется несколько различных мер связи (коэффициентов корреляции), выбор которых определяется в первую очередь типом шкалы, который формирует исследуемая переменная величина. Чаще всего коэффициенты корреляции представляют собой величины, стандартизованные таким образом, что они могут принимать значения от –1 (строгая обратная связь) до +1 (строгая прямая связь). Вычисление коэффициента корреляции предполагает также определение его статистической значимости (достоверности) по соответствующим формулам или таблицам. Достоверность коэффициента корреляции может быть рассчитана для определенного уровня значимости (0,95, 0,99 и т. д.).

8.3. Коэффициент корреляции Фехнера

Коэффициент корреляции, предложенный во второй половине XIX в. Г. Т. Фехнером, является наиболее простой мерой связи между двумя переменными. Он основан на сопоставлении двух психологических признаков x_i и y_i, измеренных на одной и той же выборке, по сопоставлению знаков отклонений индивидуальных значений от среднего: $s(x_i - \bar{x})$ и $s(y_i - \bar{y})$. Вывод о корреляции между двумя переменными делается на основании подсчета числа совпадений и несовпадений этих знаков.

Пример

Пусть x_i и y_i — два признака, измеренные на одной и той же выборке испытуемых. Для вычисления коэффициента Фехнера необходимо вычислить средние значения для каждого признака, а также для каждого значения переменной — знак отклонения от среднего (табл. 8.1).

Таблица 8.1

x_i	y_i	$s(x_i - \bar{x})$	$s(y_i - \bar{y})$	Обозначение
16	20	+	+	*a*
15	17	–	–	*a*
19	16	+	–	*b*
12	22	–	+	*b*
9	18	–	+	*b*
20	12	+	–	*b*
18	15	+	–	*b*
14	18	–	+	*b*
15	16	–	–	*a*
17	18	+	+	*a*
Среднее 15,5	Среднее 17,2			

Примечание: *a* — совпадения знаков, *b* — несовпадения знаков; n_a — число совпадений, n_b — число несовпадений (в данном случае $n_a = 4$, $n_b = 6$).

Коэффициент корреляции Фехнера вычисляется по формуле:

$$K_F = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b}. \quad (8.1)$$

В рассматриваемом случае

$$K_F = \frac{4-6}{4+6} = -0{,}2.$$

Вывод

Между исследуемыми переменными существует слабая отрицательная связь.

Необходимо отметить, что коэффициент корреляции Фехнера не является достаточно строгим критерием, поэтому его можно использовать лишь на начальном этапе обработки данных и для формулировки предварительных выводов.

8.4. Коэффициент корреляции Пирсона

Исходный принцип коэффициента корреляции Пирсона — использование произведения моментов (отклонений значения переменной от среднего значения):

$$(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+(x_2-\bar{x})(y_2-\bar{y})+\ldots+(x_n-\bar{x})(y_n-\bar{y})=\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}). \quad (8.2)$$

Если сумма произведений моментов велика и положительна, то x и y связаны прямой зависимостью; если сумма велика и отрицательна, то x и y сильно связаны обратной зависимостью; наконец, в случае отсутствия связи между x и y сумма произведений моментов близка к нулю.

Для того чтобы статистика не зависела от объема выборки, берется не сумма произведений моментов, а среднее значение. Однако деление производится не на объем выборки, а на число степеней свободы $n-1$.

Величина $S_{xy} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1}$ является мерой связи между x и y и называется ковариацией x и y.

Во многих задачах естественных и технических наук ковариация является вполне удовлетворительной мерой связи. Ее недостаток в том, что диапазон ее значений не фиксирован, т. е. она может варьировать в неопределенных пределах.

Для того чтобы стандартизировать меру связи, необходимо избавить ковариацию от влияния стандартных отклонений. Для этого надо разделить S_{xy} на σ_x и σ_y:

$$\frac{S_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = r_{xy}, \tag{8.3}$$

где r_{xy} — коэффициент корреляции, или произведение моментов Пирсона.

Общая формула для вычисления коэффициента корреляции выглядит следующим образом:

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \left[\frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}\right] : \left[\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}\right] =$$

$$= \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[\sum (x_i - \bar{x})^2\right] \cdot \left[\sum (y_i - \bar{y})^2\right]}} = \text{(некоторые преобразования)} =$$

$$= \frac{\sum x_i y_i - \dfrac{\sum x_i \cdot \sum y_i}{n}}{\sqrt{\left[\sum x_i^2 - \dfrac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right] \cdot \left[\sum y_i^2 - \dfrac{\left(\sum y_i\right)^2}{n}\right]}} =$$

$$= \frac{n \cdot \sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\sqrt{\left[n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right] \cdot \left[n \cdot \sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}}. \tag{8.4}$$

Влияние преобразования данных на r_{xy}:

1. Линейные преобразования x и y типа $bx + a$ и $dy + c$ не изменяют величину корреляции между x и y.

2. Линейные преобразования x и y при $b < 0$, $d > 0$, а также при $b > 0$ и $d < 0$ изменяют знак коэффициента корреляции, не меняя его величины.

Достоверность (или, иначе, статистическая значимость) коэффициента корреляции Пирсона может быть определена разными способами:

1. По таблицам критических значений коэффициентов корреляции Пирсона и Спирмена (см. прил., табл. 13). Если полученное в расчетах значение r_{xy} превышает критическое (табличное) значение для данной выборки, коэффициент Пирсона считается статистически значимым. Число степеней свободы в данном случае соответствует $n - 2$, где n — число пар сравниваемых значений (объем выборки).

2. По табл. 15 (см. прил.), которая озаглавлена «Количество пар значений, необходимое для статистической значимости коэффициента корреляции». В данном случае необходимо ориентироваться на коэффициент корреляции, полученный в вычислениях. Он считается статистически значимым, если объем выборки равен или превышает табличное число пар значений для данного коэффициента.

3. По коэффициенту Стьюдента, который вычисляется как отношение коэффициента корреляции к его ошибке:

$$t_r = \frac{r}{m_r} \geq t_{st}(\nu = n - 2). \quad (8.5)$$

Ошибка коэффициента корреляции вычисляется по следующей формуле:

$$m_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}, \quad (8.6)$$

где m_r — ошибка коэффициента корреляции; r — коэффициент корреляции; n — число сравниваемых пар.

Рассмотрим порядок вычислений и определение статистической значимости коэффициента корреляции Пирсона.

Пример

22 старшеклассника были протестированы по двум тестам: УСК (уровень субъективного контроля) и МкУ (мотивация к успеху). Получены следующие результаты (табл. 8.2):

Таблица 8.2

№	УСК (x_i)	МкУ (y_i)	№	УСК (x_i)	МкУ (y_i)
1	27	18	12	24	12
2	24	19	13	27	15
3	27	16	14	25	15
4	30	13	15	37	23
5	25	17	16	35	24
6	18	13	17	25	20
7	28	19	18	22	14
8	31	19	19	26	21
9	31	10	20	34	24
10	30	24	21	25	17
11	18	13	22	31	17

Задание

Проверить гипотезу о том, что для людей с высоким уровнем интернальности (балл УСК) характерен высокий уровень мотивации к успеху.

Решение

1. Используем коэффициент корреляции Пирсона в следующей модификации (см. формулу 8.4):

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \cdot \sum y_i}{n}}{\sqrt{\left[\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right]\left[\sum y_i^2 - \frac{\left(\sum y_i\right)^2}{n}\right]}}.$$

Для удобства обработки данных на микрокалькуляторе (в случае отсутствия необходимой компьютерной программы) рекомендуется оформление промежуточной рабочей таблицы (табл. 8.3).

2. Проводим вычисления и подставляем значения в формулу:

$$\sum x_i = 600; \sum x_i^2 = 16864; \sum y_i = 383; \sum y_i^2 = 7025;$$

$$\sum x_i y_i = 10689.$$

Таблица 8.3

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
x_1	y_1	x_1^2	y_1^2	x_1y_1
x_2	y_2	x_2^2	y_2^2	x_2y_2
x_3	y_3	x_3^2	y_3^2	x_3y_3
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
x_n	y_n	x_n^2	y_n^2	x_ny_n
Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	Σy_i^2	Σx_iy_i

$$r_{xy} = \frac{10689 - \dfrac{600 \cdot 383}{22}}{\sqrt{\left(16864 - \dfrac{600^2}{22}\right)\left(7025 - \dfrac{383^2}{22}\right)}} = 0{,}58.$$

3. Определяем статистическую значимость коэффициента корреляции Пирсона тремя способами:

1-й способ. В табл. 13 (см. прил.) находим критические значения коэффициента для 1-го и 2-го уровней значимости: $r_{кр} = 0{,}42$; $0{,}54$ ($\nu = n - 2 = 20$).

Делаем вывод о том, $r_{xy} > r_{кр}$, т. е. корреляция является статистически значимой для обоих уровней.

2-й способ. Воспользуемся табл. 15 (см. прил.), по которой определяем число пар значений (число испытуемых), достаточное для статистической значимости коэффициента корреляции Пирсона, равного 0,58: для 1-го, 2-го и 3-го уровней значимости оно составляет соответственно 12, 18 и 28.

Отсюда мы делаем вывод о том, что коэффициент корреляции является значимым для 1-го и 2-го уровня, но «не дотягивает» до 3-го уровня значимости.

3-й способ. Вычисляем ошибку коэффициента корреляции и коэффициент Стьюдента как отношение коэффициента Пирсона к ошибке:

$$m_r = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}58^2}{20}} = 0{,}18; \; t = \frac{r_{xy}}{m_r} = \frac{0{,}58}{0{,}18} = 3{,}22.$$

В табл. 10 находим стандартные значения коэффициента Стьюдента для 1-го, 2-го и 3-го уровней значимости при числе степеней свободы $\nu = n - 2 = 20$: $t_{кр} = 2{,}09$; 2,85; 3,85.

Общий вывод

Корреляция между показателями тестов УСК и МкУ является статистически значимой для 1-го и 2-го уровней значимости.

Примечания:

При иитерпретации коэффициента корреляции Пирсоиа иеобходимо учитывать следующие моменты:

1. Коэффициеит Пирсоиа может использоваться для различиых шкал (шкала отиошеиий, иитервальиая или порядковая), за исключеиием дихотомической шкалы.

2. Корреляциоииая связь далеко ие всегда означает связь причинно-следствеиную. Другими словами, если мы иашли, предположим, положительную корреляцию между ростом и весом у группы испытуемых, то это вовсе ие озиачает, что рост зависит от веса или наоборот (оба этих призиака зависят от третьей (виешией) перемеииой, каковая в данном случае связаиа с генетическими коиституциональиыми особеииостями человека).

3. $r_{xy} \approx 0$ может наблюдаться ие только при отсутствии связи между x и y, но и в случае сильиой иелинейиой связи (рис. 8.2, *а*). В даииом случае отрицательиая и положительиая корреляции уравновешиваются и в результате создается иллюзия отсутствия связи.

4. r_{xy} может быть достаточно мал, если сильная связь между x и y иаблюдается в более узком диапазоие зиачеиий, чем исследуемый (рис. 8.2, *б*).

5. Объедииеиие выборок с различными средиими значеииями может создавать иллюзию достаточио высокой корреляции (рис. 8.2, *в*).

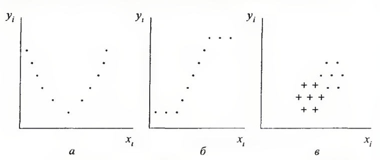


Рис. 8.2. Возможиые источиики ошибок при интерпретации величииы коэффициеита коррсляции

8.5. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена

Коэффициент корреляции Спирмена (r_s) используется в тех случаях, когда оба ряда переменных представлены ранговыми (порядковыми) шкалами. Для вычисления коэффициента Спирмена можно пользоваться двумя разными формулами, которые дают, в принципе, один и тот же результат:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum(x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)}; \qquad (8.7)$$

$$r_s = \frac{3}{n-1} \cdot \left[\frac{4\sum x_i y_i}{n(n+1)} - (n+1)\right]. \qquad (8.8)$$

Коэффициент корреляции Спирмена, так же как и r_{xy}, может варьировать от -1 до $+1$; $r_s = 1$ только в том случае, когда ранги обоих признаков в точности совпадают по x и y.

При расчете коэффициента Спирмена вручную (на микрокалькуляторе) рекомендуется использовать следующую рабочую таблицу для промежуточных вычислений:

x_i	y_i	$x_i - y_i$	$(x_i - y_i)^2$	$x_i y_i$
1	2	3	4	5
x_1	y_1	$x_1 - y_1$	$(x_1 - y_1)^2$	$x_1 y_1$
x_2	y_2	$x_2 - y_2$	$(x_2 - y_2)^2$	$x_2 y_2$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
x_n	y_n	$x_n - y_n$	$(x_n - y_n)^2$	$x_n y_n$
Σx_i	Σy_i	$\Sigma(x_i - y_i)$	$\Sigma(x_i - y_i)^2$	$\Sigma x_i y_i$

В зависимости от выбора формулы можно использовать столбцы 1—4 либо 1, 2, 5.

Если в рядах переменных (или хотя бы в одном из них) имеются связанные (повторяющиеся) ранги, то следует пользоваться формулой (8.7) с соответствующей поправкой на связанные ранги:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum(x_i - y_i)^2 - T_x - T_y}{n(n^2-1)}, \quad (8.9)$$

где $T_x = (N_x^3 - N_x) : 12$ и $T_y = (N_y^3 - N_y) : 12$ (N_x и N_y — соответственно число связанных рангов в ряду x и в ряду y).

Статистическая значимость коэффициента ранговой корреляции Спирмена определяется аналогично значимости коэффициента корреляции Пирсона (см. прил., табл. 10, 13, 15).

Пример

12 учащихся были проранжированы психологом по их открытой неприязни к преподавателю (x_i) и к другим учащимся (y_i). Результаты экспертной оценки приведены ниже (табл. 8.4):

Таблица 8.4

№ испытуемого	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	2	8	12	3	1	6	7	10	4	9	11	5
y_i	6	5	10	7	3	4	9	8	1	11	12	2

Задание

Определить, существует ли связь между открытой неприязнью учащихся к преподавателю и к другим учащимся.

Решение

Составляем рабочую таблицу для вычисления коэффициента корреляции Спирмена (табл. 8.5) и вносим полученные результаты в соответствующие формулы.

Таблица 8.5

x_i	y_i	$(x_i - y_i)^2$	$x_i y_i$
2	6	16	12
8	5	9	40
12	10	4	120
3	7	16	21
1	3	4	3
6	4	4	24
7	9	4	63
10	8	4	80

x_i	y_i	$(x_i - y_i)^2$	$x_i y_i$
4	1	9	4
9	11	4	99
11	12	1	132
5	2	9	10
	Σ	84	608

$$r_s = 1 - \frac{6\sum (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 84}{12 \cdot 143} = 0{,}71;$$

$$r_s = \frac{3}{n-1} \cdot \left[\frac{4\sum x_i y_i}{n(n+1)} - (n+1) \right] = \frac{3}{11} \cdot \left(\frac{4 \cdot 608}{12 \cdot 13} - 13 \right) = 0{,}71.$$

В таблице критических значений коэффициентов корреляции Пирсона и Спирмена находим: $r_{кр} = 0{,}58$ ($\beta_1 = 0{,}95$); 0,71 ($\beta_2 = 0{,}71$).

Вывод

Корреляция является статистически значимой для 1-го уровня.

8.6. Коэффициент ранговой корреляции Кендалла (тау Кендалла, τ)

Коэффициент корреляции Кендалла используется в случае, когда переменные представлены двумя порядковыми шкалами при условии, что связанные ранги отсутствуют. Вычисление коэффициента Кендалла связано с подсчетом числа совпадений и инверсий. Рассмотрим эту процедуру на примере задачи из подразд. 8.5.

Алгоритм решения задачи следующий:

1. Переоформляем данные табл. 8.5 таким образом, чтобы один из рядов (в данном случае ряд x_i) оказался ранжированным. Другими словами, мы переставляем пары x и y в нужном порядке и вносим данные в столбцы 1 и 2 табл. 8.6.

Таблица 8.6

x_i	y_i	Число совпадеиий	Число иверсий
1	3	9	2
2	6	6	4
3	7	5	4
4	1	8	0
5	2	7	0
6	4	6	0
7	9	3	2
8	5	4	0
9	11	1	2
10	8	2	0
11	12	0	1
12	10	0	0
	Σ	51	15

2. Определяем «степень ранжированности» 2-го ряда (y_i):

а) берем первое значение неранжированного ряда «3». Подсчитываем количество рангов *ниже* данного числа, которые *больше* сравниваемого значения. Таких значений 9 (числа 6, 7, 4, 9, 5, 11, 8, 12 и 10). Заносим число 9 в столбец «совпадения». Затем подсчитываем количество значений, которые *меньше* трех. Таких значений 2 (ранги 1 и 2); вносим число 2 в графу «инверсии»;

б) отбрасываем число 3 (мы с ним уже поработали) и повторяем процедуру для следующего значения «6»: число совпадений равно 6 (ранги 7, 9, 11, 8, 12 и 10), число инверсий — 4 (ранги 1, 2, 4 и 5). Вносим число 6 в графу «совпадения», а число 4 — в графу «инверсии»;

в) аналогичным образом процедура повторяется до конца ряда; при этом следует помнить, что каждое «отработанное» значение исключается из дальнейшего рассмотрения (подсчитываются только ранги, которые лежат ниже данного числа).

Примечание. Для того чтобы ие совершать ошибок в подсчетах, следует иметь в виду, что с каждым «шагом» сумма совпадеиий и ииверсий умеиьшается иа едииицу; это поиятно, если учесть, что каждый раз одио значеиие исключается из рассмотреиия.

3. Подсчитывается сумма совпадений (P) и сумма инверсий (Q); данные вносятся в одну из трех взаимозаменяемых формул коэф-

фициента Кендалла (8.10). Проводятся соответствующие вычисления.

$$\tau = \frac{2(P-Q)}{n(n-1)} = 1 - \frac{4Q}{n(n-1)} = \frac{4P}{n(n-1)} - 1. \qquad (8.10)$$

В нашем случае:

$$\tau = \frac{2\cdot(51-15)}{12\cdot 11} = \frac{4\cdot 51}{12\cdot 11} - 1 = 1 - \frac{4\cdot 15}{12\cdot 11} = 0{,}55.$$

4. В табл. 14 (см. прил.) находятся критические значения коэффициента для данной выборки: $\tau_{кр} = 0{,}45; 0{,}59$. Эмпирически полученное значение сравнивается с табличным.

Вывод

$\tau = 0{,}55 > \tau_{кр} = 0{,}45$. Корреляция статистически значима для 1-го уровня.

Примечание. При иеобходимости (например, при отсутствии таблицы критических значений) статистическая значимость τ Кеидалла может быть определеиа по формуле следующего вида:

$$z = \frac{S^*}{\sqrt{n(n-1)\cdot(2n+5)/18}}, \qquad (8.11)$$

где $S^* = P - Q + 1$, если $P < Q$, и $S^* = P - Q - 1$, если $P > Q$.

Значеиия z для соответствующего уровия значимости соответствуют мере Пирсона и иаходятся по соответствующим таблицам (в приложеиие ие включеиы). Для стаидартных уровией значимости $z_{кр} = 1{,}96$ (для $\beta_1 = 0{,}95$) и 2,58 (для $\beta_2 = 0{,}99$). Коэффициеит корреляции Кендалла является статистически значимым, если $z > z_{кр}$.

В нашем случае $S^* = P - Q - 1 = 35$ и $z = 2{,}40$, т. е. первоначальный вывод подтверждается: корреляция между признаками статистически достоверна для 1-го уровня значимости.

8.7. Дихотомический коэффициент корреляции (φ)

Коэффициент φ используется в качестве меры связи в тех случаях, когда признаки x и y измеряются в дихотомической шкале наименований и могут принимать значения 0 или 1.

Пример

Проведен социологический опрос, касающийся отношения населения к религии. Было опрошено 250 респондентов (100 мужчин и 150 женщин). По результатам опроса оказалось, что среди мужчин 40 верующих и 60 атеистов, а среди женщин 85 оказались верующими и 65 — атеистами.

Задание

Выяснить, существует ли связь между полом и отношением к религии. Определить знак и статистическую значимость коэффициента корреляции.

Решение

Введем необходимые обозначения:

— шкала x — пол (1 — мужчины, 0 — женщины);

— шкала y — отношение к религии (1 — верующий, 0 — атеист).

Задачу можно решить двумя различными способами:

1-й способ

1. Составляем матрицу сопряженности признаков:

		Признак x		
		1	0	Σ
Признак y	1 0	a c	b d	$a + b$ $c + d$
	Σ	$a + c$	$b + d$	

Подставляем в матрицу полученные экспериментальные значения. В данном случае в качестве измеряемого признака служит число испытуемых, принимающее разные значения при сочетании шкал x и y. Так, в клетку a матрицы вносится число испытуемых, имеющих единицу по обеим шкалам, т. е. число верующих мужчин; в клетку b — число испытуемых, имеющих 0 по шкале x и 1 по шкале y (число верующих женщин) и т. д.

		Признак x		
		1	0	Σ
Признак y	1 0	40 60	85 65	125 125
	Σ	100	150	

3. Используем формулу дихотомического коэффициента корреляции:

$$\varphi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}. \qquad (8.12)$$

4. Проводим вычисления:

$$\varphi = \frac{40 \cdot 65 - 85 \cdot 60}{\sqrt{125 \cdot 125 \cdot 100 \cdot 150}} = -0{,}163.$$

Интерпретация знака коэффициента корреляции состоит в том, что если он положителен, то единица по x коррелирует с единицей по y, 0 по x коррелирует с 0 по y. Отрицательный коэффициент (как в нашем случае) свидетельствует о том, что единица по x коррелирует с 0 по y, 0 по x коррелирует с единицей по y. Другими словами, женщины являются более верующими, а мужчины — более атеистичными.

По таблице критических значений дихотомического коэффициента корреляции (см. прил., табл. 16) находим, что коэффициент является статистически значимым для 1-го уровня ($\varphi_{кр} = 0{,}13$).

При отсутствии соответствующей таблицы можно воспользоваться следующим соотношением (для 1-го уровня значимости):

$$z = \varphi \cdot \sqrt{n} > 1{,}96 \text{ и } \chi^2 = \varphi^2 \cdot n > 3{,}84.$$

В нашем случае: $z = 2{,}58$ и $\chi^2 = 6{,}64$, т. е. вывод подтверждается.

Кроме того, по табл. 6 (см. прил.) можно определить статистическую значимость χ^2 и для более высоких уровней ($\nu = 1$).

Вывод

Корреляция между полом и отношением к религии является статистически значимой, что можно констатировать с вероятностью 0,95.

2-й способ

Введем соответствующие обозначения: p_x — относительная доля испытуемых, имеющих единицу по x, $q_x = 1 - p_x$ — имеющих нуль по x; аналогично: p_y — доля испытуемых, имеющих единицу по y, $q_y = 1 - p_y$ — имеющих нуль по y; наконец, p_{xy} — доля людей, имеющих единицы по x и по y.

Коэффициент φ вычисляется по формуле:

$$\varphi = \frac{p_{xy} - p_x p_y}{\sqrt{p_x q_x p_y q_y}}. \quad (8.13)$$

В нашем примере: $p_x = 100 : 250 = 0{,}40$; $q_x = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$; $p_y = 120 : 250 = 0{,}50$; $q_y = 1 - 0{,}50 = 0{,}50$; $p_{xy} = 40 : 250 = 0{,}16$. Подставляя значения в формулу, получаем: $\varphi = -0{,}163$. Вывод подтверждается.

8.8. Точечный бисериальный коэффициент корреляции (r_{pb})

Точечный бисериальный коэффициент корреляции используется тогда, когда одна переменная формирует дихотомическую шкалу наименований, другая — шкалу интервалов или шкалу отношений.

Пример

В группе испытуемых, протестированных по тесту Айзенка, обнаружено 15 экстравертов, из них 8 с высоким уровнем нейротизма (холерики) и 7 — с низким нейротизмом (сангвиники). Тест Спилбергера обнаружил у тех и других следующий уровень личностной тревожности (УЛТ) (табл. 8.7):

Таблица 8.7

Тип темперамента	Уровень личностной тревожности							
Холерики	42	44	40	38	43	37	41	42
Сангвиники	34	36	38	40	35	38	39	

Задание

Определить уровень связи и ее статистическую значимость между типом темперамента и уровнем личностной тревожности.

Решение

1. Учитывая, что шкала типов темперамента дихотомическая, а шкала УЛТ — интервальная, используем формулу для вычисле-

ния точечно-бисериального коэффициента корреляции:

$$r_{pb} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{\sigma_y} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_0}{n(n-1)}}, \qquad (8.14)$$

где $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_0$ — соответственно средние значения переменных для двух интервальных шкал, т. е. средние значения УЛТ для холериков ($\bar{y}_1$) и сангвиников ($\bar{y}_0$); σ_y — стандартное отклонение для всей выборки; n_1 и n_0 — численность каждой из сравниваемых выборок и $n = n_1 + n_0$ — общее число испытуемых.

2. Определяем промежуточные значения: $\bar{y}_1 = 40{,}9$; $\bar{y}_0 = 37{,}1$; $\sigma_y = 2{,}95$; $n_1 = 8$; $n_0 = 7$; $n = 15$.

3. Проводим вычисления:

$$r_{pb} = \frac{40{,}9 - 37{,}1}{2{,}95} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 7}{15 \cdot 14}} = 0{,}67.$$

4. Определяем число степеней свободы: $\nu = (n_1 - 1) + (n_0 - 1) = 13$.

5. По табл. 13 (см. прил.) находим критические значения коэффициента корреляции (специальной таблицы для r_{pb} не существует): $r_{кр} = 0{,}51$ ($\beta_1 = 0{,}95$) и $0{,}64$ ($\beta_2 = 0{,}99$); $r_{pb} > r_{кр}$. В данном случае можно воспользоваться и табл. 15, из которой следует, что для статистической значимости коэффициента, равного 0,67, достаточно 9 испытуемых для 1-го и 13 — для 2-го уровня (в нашем примере $n = 15$).

Вывод

Корреляция между типом темперамента и уровнем личностной тревожности статистически значима для 1-го и 2-го уровней.

8.9. Рангово-бисериальный коэффициент корреляции (r_{rb})

Рангово-бисериальный коэффициент корреляции используется в том случае, когда одна переменная измеряется в дихотомической шкале наименований, другая представлена порядковой шкалой.

Пример

10 подростков (из них 6 мальчиков и 4 девочки) были проранжированы на предмет внешних проявлений агрессивности по отношению к своим сверстникам. Ранги распределились следующим образом (табл. 8.8):

Таблица 8.8

Пол	Ранг агрессивности					
Мальчики	1	2	4	6	7	8
Девочки	3	5	9	10		

Задание

Определить, существует ли связь между полом и агрессивностью в группе исследуемых подростков.

Решение

1. Учитывая, что мы имеем дело с дихотомической и ранговой шкалами, используем рангово-бисериальный коэффициент корреляции:

$$r_{rb} = \frac{2}{n} \cdot (\bar{y}_1 - \bar{y}_0), \tag{8.15}$$

где $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_0$ — средние ранговые значения, n — численность выборки.

2. Проводим вычисления:

$$r_{rb} = \frac{2}{10} \cdot (4{,}67 - 6{,}75) = -0{,}42 \cdot$$

$\nu = (n_1 - 1) + (n_0 - 1) = 8$; $r_{кр} = 0{,}63$ ($\beta_1 = 0{,}95$) и $0{,}77$ ($\beta_2 = 0{,}99$). $r_{pb} < r_{кр.}$

Вывод

Корреляция между полом и агрессивностью для данной выборки испытуемых не является статистически значимой.

8.10. Выбор меры связи

Для того чтобы сделать адекватный выбор коэффициента корреляции для решения той или иной задачи, необходимо правильно

определить тип шкалы, которым представлена та или иная переменная. Возможные сочетания различных типов шкал и соответствующие им коэффициенты корреляции представлены в табл. 8.9.

Таблица 8.9

Тип шкалы		Коэффициент корреляции
1	2	
Дихотомическая	Дихотомическая	Дихотомический (φ)
Дихотомическая	Порядковая (ранговая)	Раигово-бисериальный (r_{rb})
Дихотомическая	Интервальиая	Точечио-бисериальиый (r_{pb})
Раиговая	Раиговая	Коэффициеит Пирсоиа (r_{xy}) Коэффициеит Спирмеиа (r_s) Коэффициеит Кеидалла (τ)
Ранговая	Интервальиая	Коэффициеит Пирсоиа (r_{xy})
Интервальиая	Интервальиая	Коэффициент Пирсона (r_{xy})

В некоторых случаях (как правило, для упрощения обработки результатов) используют преобразования одной шкалы в другую. Тем не менее эти преобразования могут быть сделаны только в одном направлении: интервальная → ранговая → дихотомическая шкала (но не наоборот). Порядок преобразования интервальной шкалы в ранговую был рассмотрен нами ранее (критерий Манна — Уитни, подразд. 7.3). В то же время напомним, что такое преобразование существенно обедняет информацию о поведении переменной и может использоваться лишь в случае необходимости.

8.11. Матрицы корреляций

Матрицы корреляций (иначе — корреляционные матрицы) используются в тех случаях, когда нам необходимо определить попарные связи между большим количеством переменных. Так, если мы имеем дело только с двумя переменными x и y, для определения связи между ними достаточно одного коэффициента связи (r_{xy}). При наличии трех переменных (x, y, z) необходимо использовать уже 3 коэффициента: r_{xy}, r_{xz} и r_{yz}. Определение связи между 4 перемен-

ными предполагает вычисление шести, между 5 переменными — десяти коэффициентов корреляции и т. д. Корреляционные матрицы служат для упорядочивания и наглядного представления этих значений. Общий вид корреляционной матрицы при использовании 6 измеряемых признаков (обозначим их латинскими буквами от *A* до *F*) представлен в табл. 8.10.

Таблица 8.10

Переменная	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
A	1					
B		1				
C			1			
D				1		
E					1	
F						1

Надо ли заполнять всю площадь матрицы? Скорее всего, это необязательно. В данном случае необходимо руководствоваться двумя правилами:

1. $r_{xx} = 1$. Другими словами, корреляция переменной сама с собой равна единице. Таким образом, главная диагональ матрицы автоматически будет представлена единицами и вычислений не требует.

2. $r_{xy} = r_{yx}$, т. е. левая нижняя и правая верхняя половины матрицы будут зеркально отражать друг друга (так, $r_{AD} = r_{DA}$ и т. д.). Поэтому заполняется лишь одна (как правило, правая верхняя) половина матрицы.

Руководствуясь этими правилами, легко вычислить общее число коэффициентов корреляции для упорядочения переменных. Рассуждаем следующим образом: для *N* переменных общая площадь матрицы будет составлять N^2; вычитая число значений главной диагонали матрицы *N* и деля оставшееся значение пополам, получаем $(N^2 - N)/2 = N(N - 1)/2$. Так, если мы имеем 15 переменных, то число возможных связей между ними будет составлять $15 \cdot (15 - 1)/2 = 105$.

При большом числе переменных такие упорядоченные матрицы корреляций могут оказаться довольно громоздкими. Для наглядности представления рекомендуется пользоваться «редуцированны-

ми» матрицами, т. е. удалять из них все коэффициенты корреляции, не достигающие критического значения. Работа с такими матрицами более удобна и экономична.

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ

Задача 8.1

Согласно концепции Г. Айзенка, экстраинтроверсия и нейротизм являются независимыми переменными, не связанными между собой.

Задание

Проверить исходную предпосылку Г. Айзенка, используя данные, полученные на 50 испытуемых, протестированных по тесту Айзенка (ЭИ — показатели экстраинтроверсии, Н — показатели нейротизма).

№	ЭИ	Н	№	ЭИ	Н	№	ЭИ	Н	№	ЭИ	Н	№	ЭИ	Н
1	7	18	11	7	18	21	13	10	31	13	18	41	9	6
2	13	15	12	9	10	22	18	17	32	19	8	42	11	4
3	12	20	13	10	12	23	5	11	33	5	11	43	18	18
4	15	9	14	9	15	24	16	23	34	7	14	44	18	9
5	14	20	15	6	20	25	13	16	35	6	8	45	15	21
6	16	15	16	17	12	26	15	18	36	11	10	46	10	11
7	11	15	17	12	8	27	7	7	37	17	11	47	8	5
8	8	20	18	9	13	28	16	20	38	11	12	48	13	15
9	9	15	19	17	8	29	16	9	39	7	15	49	17	16
10	18	9	20	8	12	30	14	11	40	14	10	50	12	15

Задача 8.2

У 50 испытуемых, протестированных по тесту Шмишека, определялся уровень гипертимности и дистимности (черты, связанные с преобладающим настроением, доминирующим эмоциональным фоном). Теоретически эти черты являются противоположными: гипертимность характеризует повышенное настроение, преобладание положительных эмоций, дистимность — наоборот. В то же вре-

мя определение этих качеств основывается на ответах испытуемых на разные, по существу, вопросы.

Экспериментальные данные:

№	Гип.	Дис.	№	Гип.	Дис.	№	Гип.	Дис.	№	Гип.	Дис.	№	Гип.	Дис.
1	4	2	11	0	5	21	4	1	31	4	4	41	2	2
2	3	0	12	2	1	22	5	0	32	2	1	42	5	2
3	2	5	13	1	7	23	5	1	33	2	1	43	3	2
4	1	3	14	2	2	24	1	5	34	2	4	44	5	0
5	5	5	15	1	5	25	6	4	35	1	3	45	4	5
6	3	3	16	1	1	26	3	4	36	0	3	46	3	3
7	3	3	17	3	3	27	2	3	37	5	0	47	5	0
8	2	1	18	6	1	28	3	5	38	2	3	48	4	2
9	3	4	19	1	3	29	2	3	39	1	2	49	4	2
10	5	0	20	4	1	30	5	0	40	1	4	50	4	3

Задание

Подтвердить или опровергнуть версию о противоположности двух психологических черт — гипертимности и дистимности.

Задача 8.3

У 10 испытуемых измерялся уровень нейротизма по тесту Айзенка и импульсивность по тесту Шмишека. Получены следующие результаты:

Испытуемый	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Нейротизм	12	19	11	13	20	17	8	15	18	16
Импульсивность	3	5	4	3	7	4	2	5	7	3

Задание

Определить наличие или отсутствие связи между нейротизмом и импульсивностью.

Задача 8.4

По результатам областных олимпиад по биологии и математике определились 10 школьников, занявших призовые места по обоим предметам. Распределение мест по биологии (x) и математике (y) указано в таблице.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	7	1	10	3	6	8	2	9	4	5
y	1	7	9	2	4	8	3	10	5	6

Задание

Определить, существует ли связь между знаниями призеров-школьников по биологии и математике.

Задача 8.5

У 20 старшеклассников определялся коэффициент интеллекта (IQ), в соответствии с которым школьники были проранжированы в порядке его убывания (каждому из них был присвоен ранг от 1 до 20). Те же школьники были проранжированы по среднему баллу текущей успеваемости. Получены следующие результаты:

Ранг IQ	Ранг усп.	Ранг IQ	Ранг усп.	Ранг IQ	Ранг усп.	Ранг IQ	Ранг усп.
1	5	6	16	11	10	16	8
2	11	7	13	12	18	17	19
3	1	8	2	13	7	18	4
4	12	9	17	14	3	19	20
5	6	10	14	15	15	20	9

Задание

Определить, существует ли связь между коэффициентом интеллекта и успеваемостью для данной группы школьников.

Задача 8.6

Опрос учащихся выпускного класса одной из средних школ (32 человека, из них 14 юношей и 18 девушек) показал, что среди опрошенных 9 юношей и 5 девушек регулярно посещают дискотеку.

Задание

Определить уровень и достоверность корреляции между полом и посещением дискотеки.

Задача 8.7

У 56 испытуемых (28 юношей и 28 девушек) определялся показатель экстраинтроверсии по тесту Айзенка. Полученные результаты даны в табличной форме.

№	Ю	Д	№	Ю	Д	№	Ю	Д	№	Ю	Д
1	13	7	8	18	18	15	5	5	22	14	12
2	15	12	9	9	15	16	16	7	23	9	10
3	14	7	10	10	16	17	13	11	24	18	10
4	16	6	11	9	16	18	7	11	25	10	14
5	11	17	12	12	14	19	6	11	26	8	16
6	8	17	13	9	13	20	17	18	27	13	3
7	9	13	14	8	19	21	7	15	28	17	8

Задание

Определить, существует ли связь между полом и уровнем экстраинтроверсии для данной выборки испытуемых.

Задача 8.8

У 20 испытуемых определялся уровень личностной тревожности (УЛТ) по тесту Спилбергера, а также уровень нейротизма и экстраинтроверсии по тесту Айзенка. Определение типа темперамента по Айзенку выявило среди 20 испытуемых 9 холериков, 6 сангвиников, 3 флегматика и 2 меланхолика. Значения УЛТ у разных испытуемых распределились следующим образом.

Тип темперамента	Уровень личностной тревожности								
Холерики	38	41	40	37	42	39	40	43	42
Сангвиники	34	38	36	40	35	37			
Флегматики	35	39	37						
Меланхолики	42	41							

Задание

Определить, существует ли связь между типом темперамента и уровнем личностной тревожности у холериков и сангвиников.

Задача 8.9

У 10 испытуемых обоего пола определялись показатели импульсивности и экзальтированности по тесту Шмишека. Получены следующие результаты:

Испытуемый	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Импульсивность	2	4	7	6	8	5	7	6	4	2
Экзальтированность	1	3	4	2	3	3	1	2	4	1

Задание

Определить, существует ли корреляция между двумя показателями акцентуаций (импульсивностью и экзальтированностью) для данной выборки испытуемых.

Задача 8.10

10 юношей и 10 девушек выпускного класса средней школы получили следующие средние баллы аттестата:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Юноши	3,6	4,1	4,8	3,2	3,9	4,3	3,8	4,2	3,4	4,7
Девушки	4,8	4,3	4,4	3,3	4,2	3,8	4,9	4,1	4,0	3,6

Задание

Определить уровень и достоверность корреляции между полом и средним баллом выпускного аттестата.

Задача 8.11

В спортивных состязаниях учащихся средней школы определилось 10 призеров (6 в одном выпускном классе и 4 в другом). Призовые места определились следующим образом: в 11 «А» классе — 1, 3, 4, 6, 8 и 9-е; в 11 «Б» — 2, 5, 7 и 10-е место.

Задание

1. Определить, учащиеся какого класса выступили на соревнованиях более успешно.
2. Определить коэффициент корреляции между выпускным классом и призовыми местами.

Задача 8.12

В исследовании, моделирующем деятельность авиадиспетчера, группа испытуемых (10 человек) проходила подготовку перед началом работы на тренажере. При этом подсчитывалось число ошибок, допущенных при тренировке. Кроме того, у каждого испытуемого определялись показатели вербального и невербального интеллекта по методике Д. Векслера. Получены следующие результаты:

Испытуемый	Количество ошибок	Вербальный IQ	Невербальный IQ
1	29	131	106
2	54	132	90

Испытуемый	Количество ошибок	Вербальный IQ	Невербальный IQ
3	13	121	95
4	8	127	116
5	14	136	127
6	26	124	107
7	9	134	104
8	20	136	102
9	2	132	111
10	17	136	99

Задание

Определить, связано ли количество ошибок, допущенных испытуемыми в тренировочной сессии, с показателями вербального и невербального интеллекта по Векслеру.

Задача 8.13

В выборке петербуржцев в возрасте от 20 до 78 лет (31 мужчина, 46 женщин) предлагалось ответить на вопрос: «Какой уровень развития каждого из перечисленных ниже качеств необходим для депутата?» Оценка производилась по 10-балльной шкале. Кроме того, проводилась индивидуальная диагностика кандидатов с помощью Оксфордской системы экспресс-видеодиагностики (20-балльная шкала) по тому же набору личностных качеств, который предъявлялся выборке избирателей.

Задание

Определить, насколько депутат К-в соответствует эталону избирателей.

№ п/п	Наименование качества	Усредненная эталонная оценка избирателей	Индивидуальный показатель депутата К-ва
1	Общий уровень культуры	8,64	15
2	Обучаемость	7,89	7
3	Логика	8,38	12
4	Способность к творчеству нового	6,97	5
5	Самокритичность	8,28	14
6	Ответственность	9,56	18

№ п/п	Наименование качества	Усредненная эталонная оценка избирателей	Индивидуальный показатель депутата К-ва
7	Самостоятельность	8,12	13
8	Энергия, активность	8,41	17
9	Целеустремленность	8,00	19
10	Выдержка, самообладание	8,71	9
11	Стойкость	7,74	16
12	Личностная зрелость	8,10	11
13	Порядочность	9,02	12
14	Гуманизм	7,89	10
15	Умение общаться с людьми	8,74	8
16	Терпимость к чужому мнению	7,84	6
17	Гибкость поведения	7,67	4
18	Способность производить благоприятное впечатление	7,23	8

Задача 8.14

Клинический психолог и логопед совместно проранжировали 20 детей по двум переменным: x — эмоциональная устойчивость (1 — наибольшая, 20 — наименьшая), y — степень заикания (1 — наименьшая, 20 — наибольшая). Полученные данные представлены в таблице.

Ребенок	Эмоциональная устойчивость	Степень заикания	Ребенок	Эмоциональная устойчивость	Степень заикания
1	1	5	11	11	4
2	2	1	12	12	18
3	3	8	13	13	16
4	4	3	14	14	15
5	5	2	15	15	19
6	6	10	16	16	9
7	7	13	17	17	7
8	8	6	18	18	17
9	9	14	19	19	20
10	10	12	20	20	11

Задание

Определить, существует ли связь между степенью заикания и эмоциональной устойчивостью.

Задача 8.15

В таблице приведены результаты тестирования по MMPI одного испытуемого (мужчина, студент), проведенные с интервалом 2,5 года. Можно ли говорить об изменении профиля психологических черт у данного испытуемого?

№ шкалы	Название шкалы	1-е тестирование	2-е тестирование
1	Ипохондрия	41,5	43,1
2	Депрессия	70,3	59,8
3	Истерия	64,2	58,8
4	Психопатия	71,8	71,8
5	Мужественность — женственность	61,4	57,1
6	Паранойя	61,8	58,9
7	Психастения	68,9	56,6
8	Шизофрения	76,5	63,0
9	Гипомания	51,5	46,5
10	Социальная интроверсия	54,2	46,8

Задача 8.16

Опираясь на данные Hand-test'a, подтвердите или опровергните утверждение о том, что соотношение ответов разных категорий различно в сопоставляемых группах испытуемых (см. таблицу).

Категории ответов	«Норма»	Невротики	Шизофреники	Заключенные	Эпилептики
Agg (агрессия)	1,8	1,1	2,3	1,4	4,0
Dir (директивность)	2,1	1,8	1,7	1,5	2,7
F (страх)	0,6	0,5	0,7	0,01	0
Aff (аффектация)	2,4	1,2	1,1	0,5	0,6
Com (коммуникация)	2,1	1,3	0,3	0,4	0,6
Dep (зависимость)	1,8	1,3	1,1	0,5	1,0

Окончанне таблицы

Категории ответов	«Норма»	Невротики	Шизофреники	Заключенные	Эпилептики
Ex (эксгибиционизм)	1,2	0,5	0,4	0,3	0,2
Crip (калечность)	1,0	0,5	0,5	0,7	1,0
Act (активные безличные ответы)	8,3	4,0	4,0	3,5	7,4
Pas (пассивные безличные ответы)	2,2	2,1	2,0	0,3	1,8
Des (описание)	0,8	0,8	0,6	0,2	0

Задача 8.17

Различается ли соотношение ответов, полученных в Hand-test'e, в мужской (75 человек от 20 до 40 лет, высшее гуманитарное образование) и женской (133 человека от 20 до 40 лет, высшее образование) выборках согласно статистическим нормам, приведенным Т. Н. Курбатовой (1995).

Категории ответов	Мужчииы	Жеищины
Agg (агрессня)	2,3	1,5
Dir (днректнвность)	2,2	1,9
Aff (аффектацня)	2,3	1,9
Com (коммуннкацня)	2,5	2,3
Dep (завнснмость)	1,0	0,6
F (страх)	0,8	0,7
Ex (эксгнбнционнзм)	1,0	1,1
Crip (калечность)	0,5	0,6
Des (опнсанне)	1,2	1,2
Ten (напряженне)	0,5	0,6
Act + Pas (актнвные и пассивные безличные ответы)	6,4	6,3

Задача 8.18

Выяснить, совпадает ли структура ценностных ориентаций, выявленная тестом Рокича у юношей и девушек (студенты-первокурсники УрГУ, 1998 год поступления).

*Результаты ранжирования ценностей студентами**

Термииальные цеииости	$R_ю$	$R_д$	Ииструментальиые цеиности	$R_ю$	$R_д$
Активиая деятельная жизиь	9,8	7,5	Аккуратиость	8,4	10,0
Жизиеииая мудрость	7,4	9,9	Воспитаииость	7,1	8,4
Здоровье	4,8	5,7	Высокие запросы	12,7	13,5
Интересиая работа	8,3	8,3	Жизиерадостность	8,3	7,4
Красота природы и искусства	11,1	12,3	Исполиительиость	11,7	11,7
Любовь	7,6	5,7	Независимость	6,5	8,2
Материальио обеспеченная жизнь	8,4	9,9	Непримиримость к иедостаткам	14,3	16,1
Наличие хороших и вериых друзей	7,3	6,5	Образоваииость	5,8	5,8
Общественное признание	11,1	11,3	Ответствеииость	10,1	7,5
Позиаиие	9,5	9,6	Рациоиализм	9,7	10,6
Продуктивиая жизнь	12,5	10,2	Самоконтроль	8,9	8,4
Развитие	8,8	9,8	Смелость в отстаивании своего миеиия	8,5	9,4
Развлечеиия	11,8	13,6	Твердая воля	9,1	8,6
Свобода	7,6	8,5	Терпимость	10,1	8,7
Счастливая семейиая жизнь	12,1	9,8	Широта взглядов	8,9	8,3
Счастье других	13,7	13,3	Честность	8,6	7,9
Творчество	11,6	12,1	Эффективиость в делах	10,5	10,7
Увереииость в себе	8,0	7,0	Чуткость	11,7	9,8

* Цифры соответствуют среднему рангу по выборке: $R_ю$ — средний ранг для юношей, $R_д$ — средний ранг для девушек.

Задача 8.19

С помощью цветового теста отношений (ЦТО) были исследованы несколько социальных стереотипов. В таблице приведены усредненные ранговые ряды цветов в порядке их соответствия каждому социальному стереотипу. Обозначения цветов даны в соответствии с тестом Люшера (1 — синий, 2 — зеленый, 3 — красный, 4 — желтый, 5 — фиолетовый, 6 — коричневый, 7 — черный, 0 — серый).

Социальный стереотип	Последовательность цветов	Социальный стереотип	Последовательность цветов
Друг	3 1 2 6 0 4 5 7	Божий одуванчик	4 6 5 2 0 1 3 7
Отшельник	0 1 7 6 5 2 3 4	Полковник	3 1 7 2 6 5 0 4
Клоун	4 3 5 2 1 6 0 7	Предатель	7 5 0 6 1 2 4 3

Задание

Ориентируясь на приведенные данные, проанализировать, какие социальные стереотипы наиболее близки и наиболее далеки друг от друга.

РАЗДЕЛ 9
МЕРЫ ЗАВИСИМОСТИ

9.1. Основные понятия

Напомним, что корреляционная связь между переменными не всегда означает связь причинно-следственную. Другими словами, если переменные *связаны* друг с другом, то на этом основании мы не можем сделать вывод о том, что одна из них *зависит* от другой. Так, например, на основании антропометрических измерений установлена положительная корреляция между ростом и весом субъектов в многочисленной выборке испытуемых. Однако мы не можем сказать на этот счет, что вес зависит от роста или, наоборот, рост зависит от веса. Скорее всего, и то и другое зависит от третьей переменной — в данном случае от конституциональных особенностей человека, задаваемых генетическими факторами. Совершенно аналогично, обнаружив корреляцию между уровнем нейротизма и личностной тревожности, мы не можем говорить, что они находятся в причинно-следственной зависимости друг от друга.

О *зависимости* $[y = f(x)]$ можно говорить лишь в тех случаях, когда x — независимая переменная, принимающая фиксированные значения, которые, как правило, задаются экспериментатором, а y может принимать любые значения так, что каждому x_i соответствует определенное y_i.

Чаще всего с различными формами зависимости приходится иметь дело в психофизике. Так, сенсорные сигналы, предъявляемые экспериментатором, являются независимыми величинами, а ответы испытуемого (суждения, оценки) — зависимыми от физических характеристик сигнала. С разными типами зависимостей

приходится сталкиваться и в возрастной, и в социальной, и в клинической психологии, а также в других областях.

Различают монотонные и немонотонные формы зависимости. Если функция y закономерно возрастает или убывает с увеличением значения аргумента x, то такую зависимость называют монотонной (рис. 9.1, *а*, *б*, *в*). В случае немонотонной зависимости имеется одна или несколько точек (экстремумов), в которых производная dy/dx меняет свой знак на обратный (рис. 9.1, *г*, *д*, *е*).

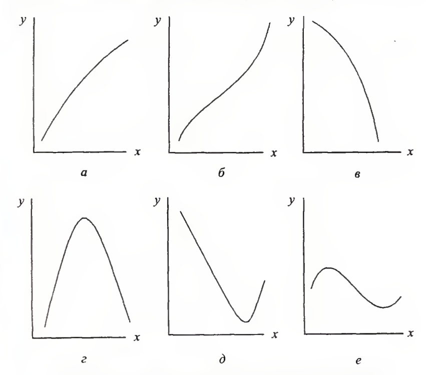


Рис. 9.1. Графическое изображение различных форм зависимости:
а, *б*, *в* — монотонная зависимость; *г*, *д*, *е* — немонотонная зависимость

Как правило, в психологических исследованиях редко используются методы математического описания немонотонных форм зависимости (при необходимости для этой цели можно использовать дифференциальные уравнения). Обычно констатируется сам факт, что наблюдается именно такая форма зависимости. Например, за-

висимость числа ошибок при решении интеллектуальной задачи от уровня эмоциональной напряженности имеет приблизительно *U*-образный вид (рис. 9.1, *д*). В этом случае наименьшее число ошибок соответствует среднему уровню тревожности. Если же исследовать зависимость эффективности совместного решения проблемы (так называемый мозговой штурм) от численности рабочей группы, то она, как правило, имеет вид инвертированной *U*-образной кривой (рис. 9.1, *г*) и т. д.

Если экспериментальная кривая имеет вид монотонной зависимости, то можно попытаться описать ее соответствующей математической функцией. Для этих целей в качестве предварительного метода можно использовать *метод подбора координат*. Этот метод позволяет в первом приближении установить, в какой системе координат исследуемая кривая является наиболее линейной. Так, например, логарифмическая зависимость $y = k \cdot \log x$ примет вид линейной функции в полулогарифмических координатах $y = f(\log x)$, степенная функция $y = k \cdot x^n$ становится линейной в двойных логарифмических координатах $\log y = f(\log x)$ и т. д. Анализ же линейной зависимости и ее математическое описание достаточно просты и предполагают использование *метода наименьших квадратов*.

Поскольку экспериментальные точки (значения переменной, полученные в опыте) всегда имеют определенный разброс и почти никогда в точности не ложатся на прямую линию, отдать предпочтение той или иной математической функции иногда затруднительно. В таких случаях предпочтение отдается той форме зависимости, где сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от теоретической функции минимальна.

9.2. Анализ линейной зависимости методом наименьших квадратов

Зависимость типа $y = a + bx$ называется линейной. Для математического описания этой формы зависимости достаточно определить величину коэффициента b и свободного члена a в координатах $y = f(x)$.

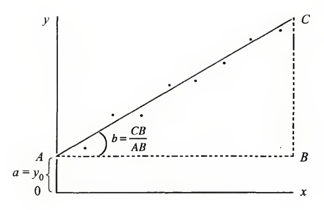


Рис. 9.2. Параметры линейной зависимости

В данном случае b — тангенс угла наклона функции $b > 0$, если функция возрастает, и $b < 0$ в случае убывающей функции. Если же функция параллельна оси абсцисс, т. е. значения y_i не зависят от аргумента, то $b = 0$.

$a = y_0$ — ордината точки при $x = 0$. Величина свободного члена a положительна ($a > 0$), если точка пересечения функции с осью ординат лежит выше нуля; $a < 0$, если точка пересечения лежит ниже начала координат.

Метод наименьших квадратов основан на одном из свойств среднего арифметического значения: сумма квадратов отклонений от среднего меньше суммы квадратов отклонений от любой другой точки (см. подразд. 4.3). Таким образом, вычисляя параметры a и b линейной функции, мы задаем такое положение линии, при котором сумма квадратов отклонений (расстояний) эмпирических (экспериментальных) точек от теоретически рассчитанной прямой минимальна.

Вычисление тангенса угла наклона функции (b):

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \tag{9.1}$$

где $S_{xy} = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \cdot \sum y_i}{n}$ и $S_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}$.

Таким образом,

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \sum x_i y_i / n}{\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 / n} = \frac{n \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}. \qquad (9.2)$$

Другими словами, для вычисления тангенса угла наклона достаточно рассчитать две уже знакомые нам величины — дисперсию значений аргумента (S_{xx}) и ковариацию (S_{xy}).

Вычисление свободного члена (а) в уравнении линейной регрессии:

$$a = \frac{\sum \left(y_i - bx_i\right)}{n} = \bar{y} - b\bar{x}. \qquad (9.3)$$

Кроме двух вышеуказанных показателей, при использовании метода наименьших квадратов часто вычисляют величину ошибки регрессии (σ). Ошибка регрессии, по сути, является аналогом стандартного отклонения. Она отражает степень точности определения положения линейной функции в данной системе координат.

Вычисление ошибки регрессии:

$$\sigma = \sqrt{\frac{S_{yy} - \left(S_{xy}\right)^2 / S_{xx}}{n-2}}, \qquad (9.4)$$

где $S_{yy} = \sum y_i^2 - \frac{\left(\sum y_i\right)^2}{n}$.

Величина ошибки регрессии может отражать:

а) величину разброса экспериментальных точек относительно теоретических значений функции, т. е. она тем больше, чем больше сумма квадратов отклонений от теоретической функции (при полном совпадении экспериментальных и теоретических значений $\sigma = 0$);

б) нелинейность функции в данной системе координат (для определения нелинейности функции не следует пренебрегать ее графическим изображением и не следует пытаться описать уравнением линейной регрессии функцию, которая явно не является линейной).

Ошибка коэффициента уравнения линейной регрессии (тангенса угла наклона) определяется по формуле:

$$\sigma_b = \frac{\sigma}{\sqrt{S_{xx} \cdot m}}, \quad (9.5)$$

где σ — величина ошибки регрессии, m — число измерений для каждого y (при условии повторения эксперимента).

В тех случаях, когда возникает необходимость сравнить между собой две индивидуальные или усредненные функции на предмет достоверности их различий, можно использовать величины тангенса угла наклона с соответствующим доверительным интервалом: $b_1 \pm t \cdot \sigma_b$ и $b_2 \pm t \cdot \sigma_b$. Вывод о достоверности различий делается в том случае, когда доверительные интервалы для двух испытуемых (или двух выборок) не перекрываются между собой (так же как и в случае определения достоверности различий между выборками по критерию Стьюдента, см. подразд. 7.4).

Для того чтобы приобрести определенный навык в расчетах подобного рода, рассмотрим задачу из области психофизики.

Пример

В психофизических исследованиях субъективной оценки громкости (R) тонального звука, проведенных на 50 испытуемых, были получены следующие данные (табл. 9.1):

Таблица 9.1

I, дБ	10	20	30	40	50	60	70	80	90
R	1,4	2,9	6,8	10,5	17,4	27,5	66,1	107,2	158,5

Задание

Принимая, что усредненные оценки громкости описываются степенной функцией Стивенса, с помощью метода наименьших квадратов рассчитать основные параметры психофизической функции субъективной оценки громкости.

Решение

1. Учитывая тот факт, что степенная функция Стивенса $y = k \cdot S^n$ есть в то же время двойная логарифмическая функция типа $\log y = n \cdot \log S + C$, и то, что шкала децибелов представляет собой лога-

рифмическую шкалу (20 дБ = 1 лог. ед.), проводим следующие преобразования:

а) преобразуем физическую шкалу сенсорного стимула в логарифмические единицы по десятичному основанию по принципу $x = I/20$.

б) логарифмируем значения субъективной шкалы по принципу $y = \lg R$ (табл. 9.2).

Таблица 9.2

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
y	0,15	0,46	0,83	1,02	1,24	1,44	1,82	2,03	2,20

2. Вычисляем предварительные (рабочие) параметры:

$$S_{xx} = 71{,}25 - \frac{506{,}25}{9} = 15{,}00. \quad S_{xy} = 35{,}63 - \frac{22{,}5 \cdot 11{,}19}{9} = 7{,}655.$$

$$S_{yy} = 17{,}8479 - \frac{125{,}2161}{9} = 3{,}935.$$

Вычисляем основные параметры психофизической функции:

$$b = \frac{7{,}655}{15} = 0{,}51. \quad a = 1{,}243 - 0{,}51 \cdot 2{,}5 = -0{,}032.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3{,}935 - \frac{7{,}655^2}{15}}{7}} = 0{,}064. \quad \sigma_b = \frac{0{,}064}{\sqrt{15 \cdot 50}} = 0{,}0023.$$

Вывод

Субъективная оценка громкости тонального звука для данной группы испытуемых описывается степенной функцией Стивенса следующего типа:

$y = 0{,}51x - 0{,}032$, или $R = 1{,}076 \cdot I^{0{,}51} + C$ (антилогарифм 0,032 равен –1,076).

В некоторых случаях возникает задача сравнения между собой психофизических функций у двух или более испытуемых на предмет достоверности их различий. Попарное сравнение можно сделать, определяя тангенс угла наклона функции с доверительным интервалом. Так, различия можно считать статистически достоверными, если интервалы $b_1 \pm t_{n-1} \cdot \sigma_{b1}$ и $b_2 \pm t_{n-1} \cdot \sigma_{b2}$ не имеют области перекрытия.

9.3. Множественная регрессия

Предположим, что на величину исследуемого признака (y) оказывает влияние большое число разнообразных факторов:

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_mx_m, \qquad (9.6)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — факторы, оказывающие влияние на переменную величину. Коэффициенты при факторах, по сути, представляют собой коэффициенты корреляции факторов с результирующим признаком. Для определения коэффициентов $b_1, b_2, ..., b_m$ (т. е. степени влияния факторов $x_1, x_2, ..., x_m$ на параметры функции), а также свободного члена уравнения a существуют специальные алгоритмы и компьютерные программы. Расчет множественной регрессии на калькуляторе чрезвычайно громоздок, поэтому, как правило, вычисления ведутся на компьютере.

По сути дела, задача множественного регрессионного анализа сводится к выявлению тех факторов, которые оказывают наиболее существенное влияние на величину исследуемого признака, и исключению тех факторов, влияние которых незначительно.

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ

Задача 9.1

5 испытуемых оценивали субъективную тяжесть предлагаемых им грузов массой от 20 до 1280 г. Использовался метод категориального шкалирования (группировки), причем тяжесть каждого груза предлагалось оценить одной из пяти категорий: 1 — очень легкий, 2 — легкий груз, 3 — груз средней тяжести, 4 — тяжелый и 5 — очень тяжелый. Получены следующие результаты:

Испытуемый	Масса груза, г						
	20	40	80	160	320	640	1280
1	1	1	2	3	3	4	5
2	1	2	2	3	4	5	5
3	1	1	2	2	3	4	5

Испытуемый	Масса груза, г						
	20	40	80	160	320	640	1280
4	1	1	2	3	4	5	5
5	1	2	2	4	4	5	5

Задание

По данным, усредненным по 5 испытуемых, построить психофизическую функцию категориальной оценки. Определить форму зависимости и рассчитать основные параметры функции.

Задача 9.2

Двое испытуемых визуально оценивали площадь круга в относительных единицах. Получены следующие данные:

Площадь круга, см^2	S	10	14	20	28	40	56	79	112	158
Оценкн 1-го нспытуемого	R_1	1,0	1,2	1,5	2	2,5	3,6	4	5	6
Оценкн 2-го нспытуемого	R_2	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8

Задание

1. Методом подбора координат определить форму психофизической функции для обоих испытуемых (использовать полулогарифмические и двойные логарифмические координаты).

2. Методом наименьших квадратов рассчитать основные параметры психофизических функций (b, a, σ и σ_b) для обоих испытуемых.

3. Используя величины b_1 и b_2, определить достоверность различий между психофизическими функциями двух испытуемых (для 1-го уровня значимости $t_{ст} = 2{,}31$).

Задача 9.3

50 испытуемыми проведено шкалирование яркости светового сигнала. Соотношения между физической яркостью (B) и ее субъективной оценкой (R_B) показаны в таблице.

B, кд/м²	1	2,5	10	25	100	250	1000	2500	10000	25000
R_B	1,0	1,5	2,2	3,2	4,7	6,8	10,1	14,8	21,7	32,0

Задание

Принимая, что субъективная оценка яркости описывается степенной функцией Стивенса, построить психофизическую функцию в координатах $\lg R = f(\lg B)$ и определить ее основные параметры (b, a, σ и σ_b).

Задача 9.4

10 испытуемых оценивали длительность тонального звука методом кросс-модального подбора, рисуя линии соответствующей длины на экране дисплея. Получены следующие результаты:

Испытуемый	Длительность звука, с						
	0,25	0,5	1,0	2,0	4,0	8,0	16,0
Ю. П.	10	16	35	84	82	138	292
Ю. М.	5	12	29	30	74	152	303
Л. Г.	10	25	49	50	153	226	267
И. Т.	7	15	23	30	58	124	259
Т. З.	14	24	44	71	128	241	318
Е. К.	6	19	45	54	62	143	193
Н. У.	8	19	28	49	112	182	284
М. Х.	5	7	9	24	73	190	280
Л. К.	6	8	25	80	135	239	310
Н. А.	6	10	20	39	43	102	198

Примечание. Цифры в таблице соответствуют длине подбираемых линий в миллиметрах.

Задание

1. Методом подбора координат определить форму психофизической функции $L = f(T)$ для данных, усредненных по 10 испытуемым.

2. Методом наименьших квадратов вычислить основные параметры психофизической функции для кросс-модального подбора длины линий к длительности звукового сигнала.

РАЗДЕЛ 10

МЕРЫ ВЛИЯНИЯ

10.1. Сущность проблемы

В различных областях психологии часто приходится иметь дело с влиянием на исследуемый признак тех или иных факторов. Понятие фактора в данном случае трактуется чрезвычайно широко: по сути, это любое воздействие, которое может изменять величину исследуемого признака. Так, в клинической практике это может быть действие психотропных препаратов или психотерапевтическое воздействие. В педагогической психологии в качестве факторов могут выступать те или иные учебно-воспитательные методики. При исследовании какого-либо психологического признака в разных возрастных группах в качестве фактора может рассматриваться возраст испытуемых и т. д. При влиянии определенных факторов или их совокупности величина исследуемого признака может меняться в ту или иную сторону. Задача состоит в том, чтобы на основании изменения исследуемого признака определить статистическую достоверность (значимость) влияния данного фактора. Для анализа достоверности влияния того или иного фактора, а также для сравнения между собой силы влияния разных факторов используются как параметрические (дисперсионный анализ), так и непараметрические меры влияния (критерий знаков, критерий T Вилкоксона и др.).

10.2. Непараметрические меры влияния

10.2.1. Критерий знаков

Критерий знаков используется в тех случаях, когда измерение психологического признака проводится на одной и той же группе (выборке) испытуемых до и после однократного воздействия инте-

ресующего нас фактора. Критерий знаков весьма прост для вычисления и предусматривает лишь установление знака различий между парами сравниваемых величин исследуемого признака до и после влияния. После суммирования числа положительных и отрицательных сдвигов находится их соотношение и сравнивается с табличным (критическим). Влияние фактора считается статистически достоверным, если расхождения значений превышают табличное значение. Если в экспериментальных данных имеются нулевые сдвиги (т. е. исследуемый признак не изменяется под воздействием фактора), то такие результаты исключаются из рассмотрения, а количество наблюдений n уменьшается на число нулевых сдвигов.

10.2.2. Критерий Вилкоксона

Аналогично критерию знаков, критерий T Вилкоксона используется для сопоставления показателей, измеренных в двух разных условиях на одной и той же выборке испытуемых. Он позволяет установить не только направленность изменений, но и их выраженность, т. е. определяет, является ли сдвиг показателей в каком-то одном направлении более интенсивным, чем в другом. Критерий может быть использован, если исследуемый признак измерен на шкале порядка или шкале интервалов. Объем выборки — от 5 до 50 человек.

Рассмотрим алгоритм вычислений по критерию знаков и критерию Вилкоксона на примере одной и той же задачи.

Пример

У 15 пациентов неврологической клиники измерялся уровень реактивной тревожности до (x_i) и после (x_i') соответствующего психотерапевтического воздействия. Получены следующие результаты (табл. 10.1):

Таблица 10.1

Испытуемый	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	46	48	54	43	47	51	48	50	49	57	41	48	53	42	48
x_i'	43	44	56	40	48	49	52	45	48	53	38	43	52	40	49

Задание

Определить эффективность психотерапевтического воздействия.

Решение

Оформляем данные в виде соответствующей таблицы (табл. 10.2):

Таблица 10.2

x_i	x_i'	s	$x_i - x_i'$	$\|x_i - x_i'\|$*	R	R*	R^-
1	2	3	4	5	6	7	8
46	43	+	3	1	1	2,5	
48	44	+	4	1	2	2,5	
54	56	–	–2	1	3	2,5	6
43	40	+	3	1	4	2,5	
47	48	–	–1	2	5	6	2,5
51	49	+	2	2	6	6	
48	52	–	–4	2	7	6	12
50	45	+	5	3	8	9	
49	48	+	1	3	9	9	
57	53	+	4	3	10	9	
41	38	+	3	4	11	12	
48	43	+	5	4	12	12	
53	52	+	1	4	13	12	
42	40	+	2	5	14	14,5	
48	49	–	–1	5	15	14,5	2,5
						Σ	23

В столбце 1 таблицы приведены значения УРТ до психотерапевтического воздействия, в столбце 2 — после такового. Значения УРТ в 1-м и 2-м столбцах должны располагаться в одном и том же порядке, т. е. каждая пара показателей соответствует одному и тому же субъекту.

Используем критерий знаков:

1. Для нахождения знака разницы (s) между x_i и x_i' обозначим позитивные сдвиги (уменьшение значения признака) плюсом, а негативные (увеличение значения) — минусом (столбец 3 табл. 10.2).

2. Находим соотношение плюсовых и минусовых значений: n (–) = 4; n (+) = 11. Таким образом, s = 4 : 11 (для удобства сравнения с табличными значениями на первое место ставится меньшее, на второе — большее число.

3. Сравниваем полученные значения с табличными (критическими) (см. прил., табл. 17): для $n = 15$ $s_{кр} = 4 : 11$.

4. Делаем вывод о том, что по критерию знаков влияние фактора находится на границе статистической достоверности.

Таким образом, по критерию знаков мы не смогли доказать, что влияние фактора является статистически значимым даже для 1-го уровня.

При отсутствии соответствующей таблицы можно воспользоваться формулой следующего вида:

$$z = \frac{(N \pm 0{,}5) - n/2}{\sqrt{n/2}}, \qquad (10.1)$$

где N — сумма плюсов или сумма минусов, n — общее число значений, 0,5 — поправочный коэффициент, который добавляют к N, если $N < n/2$, или вычитают, если $N > n/2$.

Критическое значение z (мера Пирсона) для соответствующего уровня значимости находится в соответствующих таблицах.

Используем критерий Вилкоксона:

1. Находим частные разности между значениями x_i и x_i' (столбец 4).

2. Выстраиваем разности в ранжированный ряд без учета знака (столбец 5).

3. Преобразуем интервальную шкалу значений в ранговую (порядковую) (столбец 6). Данная процедура не отличается от таковой при использовании критерия Манна — Уитни (см. подразд. 7.3).

4. Вводим поправки на связанные ранги (столбец 7).

5. В последний столбец (8) переносим ранговые числа переменных того знака, которых меньше (в данном случае — ранги минусовых значений).

6. Вычисляем критерий Вилкоксона, который соответствует сумме значений в столбце 8: $T = \Sigma R^- = 23$.

7. В таблице критических значений (см. прил., табл. 18) для $n = 15$ находим: $T_{кр} = 30$ (для $\beta_1 = 0{,}95$) и $T_{кр} = 19$ (для $\beta_2 = 0{,}99$).

Необходимо помнить, что влияние фактора считается статистически значимым, если $T < T_{кр}$ (аналогично критерию Манна — Уитни).

Вывод

Влияние исследуемого фактора (сеансов психотерапевтического воздействия) является статистически достоверным для 1-го уровня значимости.

10.3. Однофакторный дисперсионный анализ

Однофакторный дисперсионный анализ (ОДА) является достаточно информативным метрическим методом оценки влияния, используется в тех случаях, когда требуется изучить однократное или повторное действие одного фактора. Когда говорится о повторном действии фактора, имеется в виду, что фактор представлен несколькими градациями, т. е. имеет 1, 2, 3, ..., J уровней (например, повторный курс лечения психотропным препаратом, повторные сеансы психокоррекции и т. д.).

Для проведения дисперсионного анализа необязательно проводить измерения на одной и той же выборке, т. е. нет необходимости подвергать одних и тех же субъектов влиянию всех исследуемых градаций фактора. Напротив, для каждого из J-уровней (градаций фактора) берется n независимых наблюдений. Естественно, что при таком подходе принимается целый ряд допущений, иногда достаточно произвольных. Предполагается, в частности, что n наблюдений на каждом уровне независимы друг от друга и взяты из *нормальной* совокупности с дисперсией σ^2. Предполагается также, что дисперсия σ^2 одинакова на всех J-уровнях (гипотеза однородности, или гомоскедактичности).

Однофакторный дисперсионный анализ включает в себя ряд этапов:

1. Результаты эксперимента представляются в виде двумерного массива (табл. 10.3).

Таблица 10.3

	Условия опыта (градации фактора)				
	1	2	3	...	J
Повторные наблюдения	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1J}
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2J}
	.	.	.	...	.
	.	.	.	...	.
	.	.	.	...	.
	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	...	x_{nJ}

2. Для каждой выборки испытуемых определяется случайная (внутригрупповая) дисперсия SS_W, связанная с вариабельностью переменной внутри каждой градации фактора:

$$SS_W = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - x_{.j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2}{n}. \qquad (10.2)$$

3. Вычисляется факториальная (межгрупповая) дисперсия SS_b, связанная с влиянием градаций фактора:

$$SS_b = \sum_{j=1}^{J} n\left(x_{.j} - x_{..}\right)^2 = \frac{\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2}{n} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2}{Jn}. \qquad (10.3)$$

4. Вычисляется общая дисперсия SS_c, которая соответствует сумме внутригрупповой и межгрупповой дисперсий: $SS_c = SS_b + SS_W$. Общую дисперсию можно также вычислить по следующей формуле:

$$SS_c = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2}{Jn}. \qquad (10.4)$$

5. Вычисляется показатель силы влияния η_x^2 как отношение межгрупповой дисперсии к общей:

$$\eta_x^2 = SS_b / SS_c. \qquad (10.5)$$

6. Определяется число степеней свободы:

а) число степеней свободы, связанное с межгрупповой дисперсией: $\nu_1 = J - 1$;

б) число степеней свободы, связанное с внутригрупповой дисперсией: $\nu_2 = J(n - 1)$.

7. Вычисляется показатель достоверности влияния:

$$F = \frac{SS_W \cdot \nu_2}{SS_b \cdot \nu_1}. \quad (10.6)$$

Достоверность определяется по критерию Фишера для определенного уровня значимости по соответствующей таблице. Стандартное значение $F_{ст}$ определяется на перекресте столбца, соответствующего значению ν_1, и строки, соответствующей значению ν_2. Вывод о том, что влияние фактора статистически значимо, принимается, если $F \geq F_{ст}$.

Для удобства работы с переменными рекомендуется пользоваться рабочей таблицей представления данных (табл. 10.4):

Таблица 10.4

1	2	...	J	1	2	...	J
x_{11}	x_{12}	...	x_{1J}	x_{11}^2	x_{12}^2	...	x_{1J}^2
x_{21}	x_{22}	...	x_{2J}	x_{21}^2	x_{22}^2	...	x_{2J}^2
.	.	...	.	.	.	...	.
.	.	...	.	.	.	...	.
.	.	...	.	.	.	...	.
x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nJ}	x_{n1}^2	x_{n2}^2	...	x_{nJ}^2

Для вычисления промежуточных значений удобно пользоваться табл. 10.5:

Таблица 10.5

№	Вычисляемый параметр	Последовательность вычислений
1	$\dfrac{\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2}{n}$	x_i (левая часть рабочей таблицы) суммируются по каждому столбцу и возводятся в квадрат: $(x_{11} + x_{21} + ... + x_{n1})^2$ $(x_{12} + x_{22} + ... + x_{n2})^2$

№	Вычисляемый параметр	Последовательность вычислений
		. . . . $(x_{1J} + x_{2J} + ... + x_{nJ})^2$ Полученные квадраты суммируются и делятся на *n*.
2	$\sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2$	Суммируются по столбцам квадраты чисел в правой части таблицы; полученные суммы квадратов суммируются построчно: $x_{11}^2 + x_{21}^2 + ... + x_{n1}^2$ + $x_{12}^2 + x_{22}^2 + ... + x_{n2}^2$ + ... + $x_{1J}^2 + x_{2J}^2 + ... + x_{nJ}^2$
3	$SS_W = (2) - (1)$	Из результата (2) вычитается результат (1), получается внутригрупповая дисперсия SS_W.
4	$\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2}{Jn}$	Суммируются все варианты по столбцам и по строкам, возводятся в квадрат и делятся на общее число значений *Jn*.
5	$SS_b = (1) - (4)$	Из результата (1) вычитается результат (4), получается межгрупповая дисперсия SS_b
6	$SS_c = (2) - (4) =$ $= (3) + (5)$	Общую дисперсию SS_c можно получить двумя путями — либо вычитанием результата (4) из результата (2), либо суммированием результатов (3) и (5), т. е. межгрупповой и внутригрупповой дисперсией.
7	$\eta_x^2 = (5)/(6)$	Показатель силы влияния вычисляется как отношение результатов (5) и (6), т. е. как отношение межгрупповой дисперсии к общей.
8	$F = \dfrac{(5)}{(3)} \cdot \dfrac{J(n-1)}{J-1}$	Вычисляется отношение (5)/(3) и умножается на $J(n-1)/(J-1)$, получается показатель достоверности влияния.

Рассмотрим алгоритм вычислений на примере конкретной задачи.

Пример

Исследовалось влияние возраста как фактора на уровень нейротизма, определяемого по тесту Айзенка. Тестирование проводилось в четырех группах испытуемых разного возраста (соответственно 7, 8, 9 и 10-й классы), по 10 человек в каждой группе.

Получены следующие результаты (табл. 10.6):

Таблица 10.6

№ испытуемого	Градации фактора (по классам)							
	значения переменных				квадраты значений переменных			
	7-й	8-й	9-й	10-й	7-й	8-й	9-й	10-й
1	16	9	21	9	256	81	441	81
2	6	14	17	13	36	196	289	169
3	19	19	23	19	361	361	529	361
4	10	16	12	14	100	256	144	196
5	11	20	12	13	121	400	144	169
6	13	18	17	12	169	324	289	144
7	21	14	15	15	441	196	225	225
8	14	22	21	23	196	484	441	529
9	13	12	9	14	169	144	81	196
10	11	17	9	17	121	289	81	289
Σ	134	161	156	149	1970	2731	2664	2359
Σ^2	17956	25921	24336	22201				

Задание

С помощью однофакторного дисперсионного анализа определить, является ли влияние возраста как фактора на уровень нейротизма статистически значимым.

Алгоритм решения:

$$1.\ \frac{\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2}{n} = \frac{17956+25921+24336+22201}{10} = 9041.$$

2. $\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 = 1970 + 2731 + 2664 + 2359 = 9724$.

3. $SS_W = (2) - (1) = 9724 - 9041 = 683$.

4. $\frac{\left(\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2}{Jn} = \frac{(134+161+156+149)^2}{40} = 9000$.

5. $SS_b = (1) - (4) = 9041 - 9000 = 41$.

6. $SS_c = (2) - (4) = (3) + (5) = 9724 - 9000 = 683 + 41 = 724$.

7. $\eta_x^2 = \frac{(5)}{(6)} = \frac{41}{724} = 0{,}057$.

8. $F = \frac{(5)}{(3)} \cdot \frac{J(n-1)}{J-1} = \frac{41}{683} \cdot \frac{36}{3} = 0{,}720$.

Ответ

$F = 0{,}720 < F_{\text{кр}} = 2{,}86$. Влияние возраста как фактора на уровень нейротизма не является статистически значимым.

10.4. Двухфакторный дисперсионный анализ

Двухфакторный дисперсионный анализ (ДДА) служит для изучения влияния на результирующий признак двух различных факторов. ДДА подразумевает формирование и анализ двухфакторных дисперсионных комплексов (ДДК).

Анализ ДДК включает в себя 5 этапов:

I. *Подбор факторов*

При организации ДДК свободный выбор факторов ограничен требованием их полной независимости друг от друга.

II. *Разделение факторов на градации*

При организации ДДК каждый фактор разделяется на градации с таким расчетом, чтобы для каждой градации первого фактора было подобрано одинаковое число градаций второго фактора.

Рассмотрим ситуацию, когда в качестве факторов выступают явно независимые друг от друга свойства, такие как пол и возраст (табл. 10.7).

Таблица 10.7

Фактор	Градация
A — пол	A_1 — мужчины, A_2 — женщины
B — возраст	B_1 — 20 ÷ 30 лет; B_2 — 30 ÷ 40 лет; B_3 — 40 ÷ 50 лет

Организация комплекса										
правильная						неправильная				
A_1			A_2			A_1			A_2	
B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2

III. *Подбор объектов исследования*

Результаты дисперсионного анализа зависят от того, насколько правильно подобраны объекты исследования по качеству и по количеству.

По своему качеству объекты должны отражать те генеральные совокупности, для изучения которых проводится исследование.

По величине изучаемого признака объекты (испытуемые) должны быть взяты по принципу случайной выборки без учета выраженности данного признака. Измеряют и учитывают величину признака после отбора испытуемых в выборочный комплекс.

Организация дисперсионного комплекса с выполнением принципа случайности называется *рандомизацией*, а комплексы, организованные таким образом, — *рандомизированными*. Нарушение принципа случайности при отборе объектов для дисперсионного анализа всегда приводит к неправильным результатам вследствие ошибки репрезентативности.

По числу объекты (испытуемые) могут быть распределены по градациям факторов различными способами: поровну, пропорционально или неравномерно. В соответствии с этим комплексы бывают равномерными, пропорциональными и неравномерными (табл. 10.8).

Таблица 10.8

Комплекс														
равномерный					пропорциональный					неравномерный				
градация	A_1		A_2		градация	A_1		A_2		градация	A_1		A_2	
	B_1	B_2	B_1	B_2		B_1	B_2	B_1	B_2		B_1	B_2	B_1	B_2
N	15	15	15	15	n	5	15	10	30	n	10	10	10	30
$B_1 : B_2$	1 : 1		1 : 1		$B_1 : B_2$	1 : 3		1 : 3		$B_1 : B_2$	1 : 1		1 : 3	

В равномерных и пропорциональных комплексах отношение объемов градаций по второму фактору одинаково для каждой градации первого фактора. Такое распределение объектов по градациям ДДК определяет их особые ортогональные свойства. Комплексы, обладающие этими свойствами (равномерные и пропорциональные), называются *ортогональными*.

Работа с неравномерными комплексами достаточно трудна, а интерпретация результатов менее надежна, нежели при работе с ортогональными комплексами.

В некоторых случаях полученный неравномерный комплекс можно преобразовать в пропорциональный или равномерный рандомизированным изъятием отдельных единичных значений признака.

IV. *Преобразование значений результативного признака*

Для облегчения счетной работы можно неудобные для счета (или ввода в компьютер) значения результативного признака (многозначные, дробные) преобразовывать в малозначные и целые числа.

Возможны следующие преобразования:

1. Все значения признака можно разделить на одно и то же число K. Это делают тогда, когда все значения делятся на число без остатка, а также в случае перехода к новым единицам измерения. Если деление происходит без изменения единицы измерения, то в некоторые результаты надо внести соответствующие поправки: значения SS умножают на K^2, а Sx/n умножают на K.

2. Все значения можно умножить на одно и то же число K. Это делают, например, когда значения представлены дробными числа-

ми. Поправки в конечные результаты вносятся обратные тем, которые вносились в предыдущем случае.

3. От всех значений можно отнять одно и то же число A. Это лучше делать тогда, когда размах значений невелик и их деление или умножение на число I с последующим округлением может заметно снизить разнообразие измеряемого признака. Поправка в окончательный результат вносится только для среднего арифметического $\bar{x}$ (необходимо прибавить число A). Остальные значения никаких поправок не требуют.

4. Можно сделать двойное преобразование, например, из каждого значения вычесть число A, а полученный результат разделить (умножить) на число K.

Способы преобразования и поправки при различных типах преобразований показаны в табл. 10.9.

Таблица 10.9

Способ преобразования	Поправка				
	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$	SS	$\sigma^2 = \frac{SS}{\nu}$	$\eta_x^2 = \frac{SS_b}{SS_c}$	$F = \frac{SS_b \cdot \nu}{SS_w}$
$x_i \cdot K$	$: K$	$: K$	$: K$	–	–
$x_i - A$	$+ A$	–	–	–	–
$(x_i - A)/K$	$\cdot K + A$	$\cdot K^2$	$\cdot K^2$	–	–
x_i/K	$\cdot K$	$\cdot K^2$	$\cdot K^2$	–	–

V. *Анализ двухфакторных комплексов*

Анализ двухфакторных комплексов проводится в несколько этапов:

1. Расчет дисперсий (сумм квадратов). Дисперсии рассчитываются в трех однофакторных комплексах:

а) для общего комплекса (SS_b, SS_W, SS_c);

б) для первого фактора (A);

в) для второго фактора (B).

2. Анализ влияния. В ДДК анализируют 6 влияний:

а) влияние первого фактора (A);

б) влияние второго фактора (B);

в) влияние сочетаний градаций обоих факторов (AB);

г) суммарное действие организованных (двух) факторов ($A + B$);

д) суммарное действие неорганизованных (остальных) факторов (случайные влияния) (W);

е) суммарное действие всех факторов, определяющих величину результирующего признака (C).

Все вышеперечисленные операции двухфакторного дисперсионного анализа можно проиллюстрировать следующим примером.

Пример

На больных амнезией испытывалось действие двух лекарственных препаратов (A и B), которые, согласно предварительным испытаниям, способствуют улучшению памяти. Для первого препарата была взята контрольная группа (A_0) и группа больных, прошедших месячный курс лечения (A_1). Для второго препарата исследовались 3 градации больных (B_0 — контроль, B_1 — больные, прошедшие один курс лечения, и B_2 — больные, прошедшие два месячных курса лечения препаратом).

Для каждой комбинации были выбраны по 5 больных, которые тестировались по методу Эббингауза (запоминание и воспроизведение бессмысленных слогов). В качестве критерия использовалась средняя вероятность правильного воспроизведения у каждого больного. Получены следующие данные (табл. 10.10):

Таблица 10.10

Пациент	Комбинация факторов					
	A_0B_0	A_0B_1	A_0B_2	A_0B_0	A_0B_1	A_0B_2
1	0,08	0,80	0,56	0,24	0,16	0,32
2	0,22	0,64	0,42	0,36	0,22	0,16
3	0,32	0,96	0,56	0,48	0,28	0
4	0,20	0,72	0,46	0,36	0,42	0,16
5	0,12	0,80	0,32	0,72	0,56	0

Задание

Методом двухфакторного дисперсионного анализа определить степень эффективности препаратов A и B, используемых для лечения больных амнезией при их раздельном и совместном применении.

Решение

1. Используем операцию $x_i \cdot 100 : 2$. Получаем следующие данные (табл. 10.11):

Таблица 10.11

Пациент	Комбинация факторов					
	A_0B_0	A_0B_1	A_0B_2	A_0B_0	A_0B_1	A_0B_2
1	4	40	28	12	8	16
2	11	32	21	18	11	8
3	16	48	28	24	14	0
4	10	36	23	18	21	8
5	6	40	16	36	28	0

2. Рассчитываем дисперсии в общем комплексе (табл. 10.12):

Таблица 10.12

	A_0			A_1			
	B_0	B_1	B_2	B_0	B_1	B_2	
x_i	4 11 16 10 6	40 32 48 36 40	28 21 28 23 16	12 18 24 18 36	8 11 14 21 28	16 8 0 8 0	$J_A = 2$ $J_B = 3$ $n = 5$
n	5	5	5	5	5	5	$Jn = 30$
$\sum x_i$	47	196	116	108	82	32	$\sum\sum x_{ij} = 581$
$\left(\sum x_i\right)^2/n$	442	7683	2691	2333	1345	205	$\sum\left(\sum x_{ij}\right)^2/n = 14699$
$\sum x_i^2$	529	7824	2794	2664	1606	384	$\sum\sum x_{ij}^2 = 15801$
$\sum x_i/n$	9,4	39,2	23,2	21,6	16,4	6,4	$\dfrac{\left(\sum x_{ij}\right)^2}{nJ} = 11252$

а) межгрупповая дисперсия:

$$SS_b = \frac{\sum\left(\sum x_{ij}\right)^2}{n} - \frac{\left(\sum\sum x_{ij}\right)^2}{Jn} = 14699 - 11252 = 3447;$$

б) внутригрупповая дисперсия:

$$SS_W = \sum\sum x_{ij}^2 - \frac{\sum\left(\sum x_{ij}\right)^2}{n} = 15801 - 14699 = 1102;$$

в) общая дисперсия:

$$SS_c = \sum\sum x_{ij}^2 - \frac{\left(\sum\sum x_{ij}\right)^2}{Jn} = 15801 - 11252 = 4549.$$

3. Рассчитываем дисперсии для факторов A и B и для сочетания их градаций (AB) (табл. 10.13):

Таблица 10.13

Показа-тель	Для фактора A			Для фактора B			
	A_0	A_1	Σ	B_0	B_1	B_2	Σ
n	15	15	30	10	10	10	30
$\sum x_i$	359	222	581	155	278	148	581
$\left(\sum x_i\right)^2/n$	8592	3286	11878	2402	7728	2190	12320

$$SS_A = \frac{\sum\left(\sum x_{ij}\right)^2}{n} - \frac{\left(\sum\sum x_{ij}\right)^2}{Jn} = 11878 - 11252 = 626;$$

$$SS_B = \frac{\sum\left(\sum x_{ij}\right)^2}{n} - \frac{\left(\sum\sum x_{ij}\right)^2}{Jn} = 12320 - 11252 = 1068;$$

$$SS_{AB} = SS_b - SS_A - SS_B = 3447 - 626 - 1068 = 1753.$$

4. Проводим анализ частных средних:

A_0B_0 — контроль; A_1 — курс лечения препаратом A; B_1 — курс лечения препаратом B; B_2 — двойной курс лечения препаратом B.

A_0: $B_0 = 9{,}4$; $B_1 = 39{,}2$; $B_2 = 23{,}2$.

A_1: $B_0 = 21{,}6$; $B_1 = 16{,}4$; $B_2 = 6{,}4$.

Анализ частных средних показывает, что наиболее высокий уровень воспроизведения характерен для сочетания A_0B_1 (т. е. после месячного курса лечения препаратом *B*). Двойной курс лечения препаратом *B* нецелесообразен, так как воспроизведение снижается. Лечение препаратом *A* дает менее выраженный эффект, а комбинированное применение препаратов *A* и *B* вообще нецелесообразно.

5. Анализ влияния (табл. 10.14):

Таблица 10.14

Показатель	SS	η_x^2	ν	SS/ν	F	ν_1 $g_Ag_B - 1$	ν_2 $Jn - g_Ag_B$	F_{st} β_1; β_2
A	626	0,14	1	626	13,61	1	24	4,3; 7,8
B	1068	0,23	2	534	11,61	2	24	3,4; 5,6
AB ($\nu = \nu_A\nu_B$)	1753	0,39	2	876	19,04	2	24	3,4; 5,6
A + *B* ($\nu = g_Ag_B - 1$)	3447	0,76	5	689	14,98	5	24	2,6; 3,9
W	1102	0,24	24	46				
C	4549	1,00	29	157				

Сила влияния: $\eta_x^2 = SS_{A(B)}/SS_C$, где SS_C — общая дисперсия.

Достоверность влияния:

$$F = \frac{SS_{A(B)}}{\nu_{A(B)}} : \frac{SS_W}{\nu_W},$$

где SS_W — случайная (внутригрупповая) дисперсия.

Анализ силы влияния:

— действие первого фактора (при усредненном действии второго) составляет 0,14 (14 %) от действия всей суммы факторов, определяющих величину результативного признака;

— действие второго фактора (при усредненном действии первого) оказалось более сильным — 0,23 (23 %);

— значительно сильнее оказалось действие сочетаний градаций обоих факторов — 0,39 (39 %);

— действие первого фактора в значительной степени зависит от градации второго: максимальный эффект наблюдается при отсутствии второго, минимальный — после двух курсов лечения вторым препаратом;

— в отсутствие первого фактора максимальный эффект наблюдается после одного курса лечения вторым препаратом, после повторного курса эффект снижается.

Анализ достоверности влияния:

Влияние каждого из факторов в отдельности, а также их сочетания достоверно при 1-м ($\beta_1 = 0{,}95$) и 2-м ($\beta_2 = 0{,}99$) уровнях значимости.

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ

Задача 10.1

С целью определения степени эффективности сеансов НЛП, проводимых у больных неврастенией, выбрано 4 группы больных по 10 человек в каждой: первая группа — контрольная (К), в которой психотерапевтических воздействий не проводилось; вторая группа (1) — больные, прошедшие 1 сеанс НЛП; третья (2) — прошедшие 2 сеанса и четвертая (3) — прошедшие 3 сеанса НЛП. В качестве критерия эффективности психотерапевтического воздействия использовался уровень ситуативной тревожности (УСТ) по тесту Спилбергера. Получены следующие данные:

Группа	Уровень ситуативной тревожности									
К	48	51	46	49	47	52	50	52	48	50
1	44	45	45	50	48	48	45	47	50	44
2	44	48	48	40	46	50	44	47	49	40
3	47	44	46	49	47	46	50	48	38	44

Задание

Определить эффективность сеансов НЛП, используя результаты тестирования по Спилбергеру на уровень ситуативной тревожности.

Задача 10.2

Группа учеников одной из школ г. Екатеринбурга была обследована по тесту Айзенка на уровень экстраинтроверсии и нейротизма. Обследование было проведено четырехкратно с перерывами в 1—2 года: в 7, 8, 9 и 10—11-м классах. Были получены следующие результаты:

№ п/п	Испытуемый	Экстраинтроверсия				Нейротизм			
		7-й кл.	8-й кл.	9-й кл.	10—11-й кл.	7-й кл.	8-й кл.	9-й кл.	10—11-й кл.
1	Д. О.	15	15	16	17	16	17	21	17
2	С. Н.	15	19	17	18	6	12	17	14
3	Д. Л.	11	13	11	13	19	22	23	23
4	Г. К.	12	8	8	12	10	14	12	15
5	Н. А.	13	11	14	14	11	18	12	12
6	В. Р.	8	8	10	8	13	20	17	13
7	К. К.	12	15	13	13	21	16	15	14
8	М. С.	8	11	7	8	14	19	21	19
9	Р. Я.	15	17	15	16	13	14	9	13
10	С. А.	18	14	16	15	11	9	9	9

Задание

Используя метод однофакторного дисперсионного анализа, определить, достоверно ли изменяются показатели экстраинтроверсии и нейротизма у подростков с 7-го по 11-й класс.

Задача 10.3

Проводилось исследование возрастной динамики личностной тревожности у подростков. Для этого были взяты 4 независимых группы испытуемых в возрасте соответственно 13, 14, 15 и 16 лет по 10 человек в каждой. Обследование проводилось по тесту Спилбергера — Ханина. Получены следующие результаты:

Возраст, лет	Испытуемый									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Уровень личностной тревожности, баллы									
13	41	42	39	40	42	39	40	37	35	38

Возраст, лет	Испытуемый									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Уровеиь личиостной тревожиости, баллы									
14	43	43	41	39	42	38	44	42	40	44
15	38	40	45	41	43	44	42	46	44	41
16	40	39	40	38	45	43	37	36	40	43

Задание

Определить, достоверно ли изменяется уровень личностной тревожности у подростков в возрасте с 13 до 16 лет.

Задача 10.4

В психологическом эксперименте исследовалось влияние мотивации на уровень запоминания слов. Трем группам испытуемых (по 10 человек в каждой) было предложены 20 многосложных редко используемых слов. Первой группе было обещано, что правильное воспроизведение десяти и более слов будет вознаграждаться призами. Во второй группе испытуемые предупреждались, что при воспроизведении менее 7 слов они будут должны сделать несколько физических упражнений. В третьей группе никаких дополнительных инструкций не давалось. Были получены следующие результаты:

Группа	Количество правильио воспроизведеииых слов									
	Испытуемые									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	7	9	6	8	11	7	6	10	7
2	8	9	7	8	10	8	7	6	9	7
3	5	7	6	6	7	7	5	9	6	7

Задание

Определить, влияет ли мотивация на успешность запоминания.

Задача 10.5

Психолог проводил психокоррекционные занятия с учениками средней школы (возраст 11—12 лет) с целью улучшения их социальной адаптации. До и после курса занятий проводилось тестирование по рисуночному тесту Розенцвейга. В качестве показателя использовался коэффициент групповой адаптации (КГА), значения которого до и после курса психокоррекции приводятся в таблице.

Школьник	КГА, %		Школьник	КГА, %	
	до коррекции	после коррекции		до коррекции	после коррекции
1	35,3	47,1	13	58,8	58,8
2	52,9	52,9	14	47,1	52,9
3	47,1	52,9	15	32,4	64,7
4	38,2	29,4	16	61,8	55,7
5	44,1	47,1	17	55,7	61,8
6	29,4	55,7	18	70,6	61,8
7	32,4	64,7	19	23,5	32,4
8	55,7	58,8	20	47,1	47,1
9	35,3	44,1	21	29,4	35,3
10	44,1	44,1	22	61,8	58,8
11	64,7	55,7	23	44,1	52,9
12	44,1	47,1	24	35,3	64,7

Задание

Опираясь на данные тестирования, определить эффективность работы психолога.

Задача 10.6

Измерялся уровень диастолического давления у 20 испытуемых в трех различных условиях: в состоянии покоя, после релаксации, после 15 минут двигательной активности. Полученные данные представлены в таблице.

Испытуемый	Активность	Покой	Релаксация	Испытуемый	Активность	Покой	Релаксация
1	81	58	61	11	70	67	81

Окончание таблицы

Испытуемый	Активность	Покой	Релаксация	Испытуемый	Активность	Покой	Релаксация
2	67	64	62	12	83	67	61
3	73	60	65	13	71	63	63
4	73	66	66	14	65	65	61
5	77	68	74	15	68	64	59
6	70	65	70	16	65	71	62
7	68	67	64	17	71	53	57
8	70	74	60	18	60	59	68
9	66	66	63	19	70	61	73
10	78	78	74	20	80	67	63

Вопрос

Влияет ли уровень активности на артериальное давление?

РАЗДЕЛ 11

ЭЛЕМЕНТЫ МНОГОМЕРНОЙ СТАТИСТИКИ

11.1. Основные понятия

Методы многомерной статистики используются в тех случаях, когда необходимо упорядочить (привести в определенную систему) большое количество переменных (измеряемых свойств, признаков, характеристик, психологических свойств и т. п.). Чаще всего к многомерной статистике прибегают специалисты в области дифференциальной психологии, которая решает проблему индивидуальных психологических различий, проблему типологизации личности и т. д.

Наиболее часто в психологии используются кластерный и факторный анализ, реже — дискриминантный анализ. Каждый из них давно уже перерос из отдельных методов в самостоятельные области математической статистики. По сути, эти направления лишь условно можно назвать «статистикой» (на том основании, что они основаны на использовании стандартных статистических методов). На самом же деле это более высокий уровень — уровень математического моделирования различных психологических свойств, процессов и состояний.

В данном разделе будут рассмотрены кластерный и факторный анализ.

11.2. Кластерный анализ

По степени использования кластерного анализа психологи, очевидно, занимают второе место (после биологов). В биологии кластерный анализ используется в первую очередь для создания

классификационных (таксономических) схем растительного и животного мира. В психологии же кластерный анализ используется при исследовании структуры психологических свойств индивида, степени общности различных психологических характеристик, черт, признаков, характера их взаимной упорядоченности, взаимоотношений с множеством других признаков и т. д. Вполне понятно, что каждый психологический признак, свойство или черта не являются изолированными — как правило, они имеют большую или меньшую степень связи друг с другом. Для выявления этих взаимосвязей и предназначен кластерный анализ. Кластерный анализ имеет смысл проводить в тех случаях, когда регистрируется большое число переменных (по крайней мере, больше десятка разных признаков).

В математическом смысле задача кластерного анализа заключается в том, чтобы на основании данных, содержащихся в множестве X, разбить множество объектов I на m кластеров (подмножеств) π_1, π_2, ..., π_m так, чтобы каждый объект I_i принадлежал одному и только одному подмножеству разбиения и чтобы объекты, принадлежащие одному и тому же кластеру, были *сходными*, в то время как объекты, принадлежащие разным кластерам, были разнородными (*несходными*) по выбранному критерию.

Решением задачи кластерного анализа является разбиение, удовлетворяющее некоторому критерию оптимальности (*целевой функции*).

Пример

8 объектов обладают одной характеристикой ($n = 8$, $p = 1$); результаты измерения представляют собой множество $X = \{3, 4, 7, 4, 3, 3, 4, 4\}$; целевая функция — внутригрупповая сумма квадратов отклонений, которая предполагается быть минимальной.

Тогда:

$$W = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2, \qquad (11.1)$$

где x_i представляет собой измерение i-го объекта.

В нашем случае: $W = 140 - 128 = 12$.

Если множество X разбить на 3 группы: $G_1 = \{3, 3, 3\}$, $G_2 = \{4, 4, 4, 4\}$, $G_3 = \{7\}$, то все внутригрупповые суммы квадратов откло-

нений будут равны нулю: $W_1 + W_2 + W_3 = 0 + 0 + 0 = 0$, где W_i обозначает сумму квадратов, соответствующую группе G_i. Оптимальное значение для этого примера равно нулю при условии, что ведется разбиение на 3 группы. В общем случае необходимо рассматривать значение целевой функции в сочетании с желаемым числом групп разбиения.

11.2.1. Функции расстояния

Для решения задачи кластерного анализа необходимо количественно определить понятия сходства и разнородности. Для этого вводится понятие расстояния (отдаленности) между соответствующими точками x_i и x_j. Если это расстояние достаточно мало, объекты i и j попадают в один кластер, если оно велико — в разные.

Используются следующие наиболее употребимые меры расстояния:

Евклидово расстояние: $$d_2(X_i, X_j) = \left[\sum_{k=1}^{p}\left(x_{ki} - x_{kj}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (11.2)$$

l_1-норма: $$d_1(X_i, X) = \sum_{k=1}^{p}\left|x_{ki} - x_{kj}\right|. \qquad (11.3)$$

l_p-норма: $$d_p(X_i, X_j) = \left[\sum_{k=1}^{p}\left|x_{ki} - x_{kj}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (11.4)$$

Мера Джеффриса — Матуситы: $$M = \left[\sum_{k=1}^{p}\left(\sqrt{x_{ki}} - \sqrt{x_{kj}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (11.5)$$

Коэффициент дивергенции Кларка: $$CD = \left[\frac{1}{p}\cdot\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{x_{ki} - x_{kj}}{x_{ki} + x_{kj}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (11.6)$$

Существуют и другие, более сложные меры расстояния, выбор которых определяется как субъективным предпочтением исследователя, так и естественным стремлением к упрощению процедуры эксперимента.

11.2.2. Меры сходства

Как правило, в качестве меры сходства используется корреляция между рядами признаков (переменных). Объекты (признаки) считаются сходными, если коэффициент корреляции близок к +1 (положительное сходство) или к –1 (отрицательное сходство), и не сходны, если r_{ij} близок к нулю. В качестве граничного значения для объединения переменных в один кластер используется критическое значение коэффициента корреляции, которое находится по соответствующим таблицам.

При построении векторных моделей необходимо подчеркнуть следующее: если X_i и X_j рассматривать как координаты двух точек в многомерном пространстве, то $r_{ij} = \cos\theta$, где θ — угол между двумя векторами.

11.2.3. Выбор числа кластеров

Кластеризация полным перебором. Является наиболее прямым способом решения проблемы и заключается в полном переборе всех возможных разбиений на кластеры и отыскании такого разбиения, которое ведет к оптимальному (минимальному) значению целевой функции. Такая процедура выполнима лишь в тех случаях, когда n (число объектов) и m (число кластеров) невелико, поскольку число разбиений *(W)* прогрессивно возрастает с увеличением n и m (напомним, что $n \geq m$). Число возможных разбиений при ограниченном числе объектов и кластеров приведено в табл. 11.1.

Динамическое программирование. Суть методов динамического программирования состоит в целенаправленном поиске разбиения, дающего минимальное значение величины W. При этом все разбиения, которые приводят к большему значению W, отбрасываются.

Таблица 11.1

Число кластеров (m)	Число объектов (n)				
	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1
2	7	15	31	63	127
3	6	25	90	301	966
4	1	10	65	350	1701

Пример

При $n = 6$ и $m = 3$, $W = 90$. При этом 90 альтернатив кластеризации дают 3 формы распределения:

1: {4}, {1}, {1} — 15 возможных вариантов

2: {3}, {2}, {1} — 60 » »

3: {2}, {2}, {2} — 15 » »

Оптимальное распределение соответствует форме 3, которая и служит основой для дальнейшего перебора вариантов:

(1, 2) (3, 4) (5, 6)

(1, 3) (2, 4) (5, 6)

(1, 4) (2, 3) (5, 6) и т. д.

В процедуре динамического программирования имеются повторения сочетаний признаков в одном и том же кластере (в нашем примере — (5, 6)), что в значительной мере сокращает число вычислений.

Естественно, что такой подход несколько произволен, так как минимизация числа разбиений, по сути, не означает, что именно эти распределения являются оптимальными.

Целочисленное программирование. Предполагает разбиение на кластеры путем последовательного введения ряда ограничений. При этом вводится так называемая матрица издержек, а задача целочисленного программирования сводится к минимизации общей суммы издержек.

11.2.4. Методы кластеризации

Наиболее популярными являются методы ***минимальной дисперсии***, которые основаны на минимизации внутригрупповых сумм квадратов отклонений.

Метод полных связей (*Соренсен*) основан на том, что два объекта, принадлежащих одной и той же группе (кластеру), имеют коэффициент сходства, который меньше некоторого порогового значения r. В данном случае r определяет максимально допустимый диаметр подмножества, образующего кластер.

Метод максимального локального расстояния (*Мак-Нотон-Смит*) предполагает, что объекты группируются последовательно по следующему правилу: два кластера объединяются, если максимальное расстояние между точками одного и другого минимально.

Метод Уорда направлен на объединение близко расположенных кластеров, причем в качестве критерия используется сумма квадратов расстояний между каждой точкой (объектом) и средней по кластеру, содержащему этот объект.

Центроидный метод (*Сокал и Миченер*) основан на определении расстояния между средними значениями кластеров.

Двухгрупповой метод (*Сокал и Миченер*) опирается на связь между объектом i и кластером I. Эта связь выражается в виде среднего коэффициента сходства между объектом i и всеми объектами, входящими в кластер I.

Метод групповых средних (*Ланс*, *Уильямс*) определяет среднее сходство между двумя кластерами I и J как среднее сходство между всеми парами объектов из I и J.

Большинство из упомянутых методов предполагает последовательную процедуру кластеризации. Некоторые разногласия между авторами касаются начального этапа кластеризации. Так, *Боннер* предлагает метод, в котором начальная точка выбирается случайно и все объекты, лежащие на расстоянии $d \leq r$ от начальной точки, принимаются за первый кластер. Из оставшихся точек снова случайным образом выбирается объект, и процесс повторяется до тех пор, пока все точки не будут принадлежать к определенным кластерам.

Хиверинен выбирает в качестве начального объекта кластеризации не случайную, а «типическую» точку, причем все эти точки лежат на минимальном расстоянии от центра оставшегося множества объектов.

В процедуре *Болла* и *Холла* первоначальные K кластеров формируются случайным отбором k точек, к которым затем присоединяется каждая из оставшихся $n - k$ точек (по минимальному расстоянию до той или иной из них).

Другие методы (*Мак-Квин, Себестьен, Дженсен, Форджи* и др.) можно рассматривать как модификации вышеизложенных методов кластеризации.

11.2.5. Представление данных

Данные кластеризации можно наглядно представить в двумерном пространстве в виде дендрограмм или разветвленного (древовидного) графа. В том и другом случае в качестве исходных данных служат матрица сходства или расстояния между объектами.

Рассмотрим в качестве примера корреляционную матрицу (матрицу сходства) следующего вида (табл. 11.2):

Таблица 11.2

Объект (признак)	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
A	1,00	0,35	0,92	0,50	0,42	0,72
B		1,00	0,47	0,67	0,65	0,54
C			1,00	0,38	0,24	0,78
D				1,00	0,84	0,44
E					1,00	0,35
F						1,00

Каждая из шести переменных, фигурирующих в матрице, обозначена латинскими буквами от *A* до *F*. Заполнена только половина матрицы, поскольку верхняя правая и нижняя левая половины зеркально отражают друг друга ($r_{AB} = r_{BA}$, $r_{BF} = r_{FB}$ и т. д.). По главной диагонали матрицы коэффициенты корреляции соответствуют единицам ($r_{xx} = 1$).

Объединение переменных в кластеры производится начиная с максимального коэффициента корреляции. При этом для построения дендрограммы переменные связываются между собой на данном уровне коэффициента корреляции r или меры расстояния $d = 1 - r^2$. Для облегчения работы эти значения округляются до пер-

вого знака после запятой. Так, максимальный коэффициент корреляции — между переменными A и C ($r = 0{,}92$), следовательно, переменные связываются между собой на уровне ~0,9. Следующий за первым (по мере убывания) коэффициент корреляции между переменными D и E равен 0,84 (переменные связываются друг с другом на уровне ~0,8). Третий по убыванию коэффициент между переменными C и F соответствует 0,78; следовательно, на уровне ~0,8 мы можем «привязать» к переменным A и C (а они уже связаны друг с другом) еще и переменную F и т. д. Таким образом, мы последовательно связываем друг с другом все переменные, формируя дендрограмму (аналогично построению «родословного дерева» исследуемых признаков в биологии).

Результирующая дендрограмма, построенная на основании корреляционной матрицы между шестью переменными, представлена на рис. 11.1. Чисто визуально по внешнему виду дендрограммы трудно сделать однозначный вывод о том, сколько же кластеров она включает (два, три или четыре). Иногда число кластеров задается самим экспериментатором. Однако чаще всего заключение о числе результирующих кластеров можно сделать по величине критического коэффициента корреляции. Считается, что переменные объединены в один кластер, если уровень связи между ними выше критического.

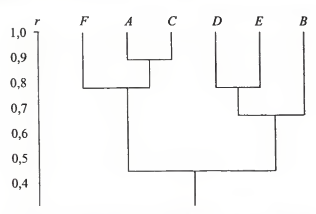


Рис. 11.1. Дендрограмма признаков, построенная на основе матрицы корреляций

Представление данных в виде разветвленного графа несколько более произвольно, хотя и здесь относительные расстояния между переменными соответствуют степени связи или различий между ними (рис. 11.2).

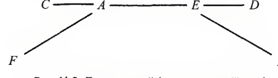


Рис. 11.2. Древовидный (разветвленный) граф

Как уже отмечалось, по данным кластерного анализа можно составить представление о том, какие психологические признаки фигурируют в одной группе, а какие относятся к разным. Например, если при комплексном психодиагностическом обследовании одновременно определяются характеристики эмоциональной, интеллектуальной и мотивационной сферы испытуемых, то следует ожидать, что характеристики одной и той же сферы объединятся в один кластер, а относящиеся к разным сферам попадут в разные кластеры.

Для кластерного анализа существуют специальные пакеты компьютерных программ, значительно облегчающих работу исследователей в этом направлении.

11.3. Факторный анализ

Факторный анализ является одним из наиболее мощных способов анализа данных в многомерной статистике. Впервые (в начале XX столетия) он был использован именно для анализа результатов психологических исследований.

В данном подразделе не ставится цель детально изложить всевозможные методы, варианты и модификации факторного анализа. Использование современной компьютерной техники и готовых пакетов программ избавляет исследователя от необходимости заниматься рутинной вычислительной работой. Наша задача состоит

в том, чтобы дать психологу общие представления о возможностях факторного анализа, об основных теоретических положениях, лежащих в его основе, а также интерпретации данных, получаемых в результате факторного анализа.

11.3.1. Основные принципы факторного анализа

Факторный анализ представляет собой набор моделей и методов, предназначенных для «сжатия» слишком больших массивов информации. В качестве исходного материала для факторного анализа служат матрицы корреляций между различными признаками (параметрами) исследуемых объектов. Если таких признаков достаточно много, матрица становится весьма громоздкой и работа с нею представляет большие трудности.

В основе факторного анализа лежит следующая гипотеза. Наблюдаемые или измеряемые параметры являются лишь косвенными характеристиками изучаемых объектов, так сказать, их внешними проявлениями. На самом же деле существуют внутренние (скрытые, не наблюдаемые непосредственно) характеристики, число которых невелико и которые определяют значения наблюдаемых параметров. Эти внутренние характеристики называют ***факторами***. Отдельные же наблюдаемые значения переменных являются линейными комбинациями факторов, которые не могут быть обнаружены в процессе наблюдения, но могут быть вычислены.

Задача факторного анализа состоит в том, чтобы представить наблюдаемые параметры в виде линейных комбинаций факторов и, возможно, некоторых дополнительных величин, связанных в первую очередь с ошибками измерения. Несмотря на то что сами факторы изначально не определены, такое разложение может быть получено и, более того, значения каждого из факторов могут быть вычислены непосредственно в ходе анализа.

Задача вычисления факторов может быть интерпретирована так, что исследуемые параметры объединяются в группы, причем параметры, входящие в одну группу, связаны между собой сильной корреляционной связью, а входящие в разные группы — слабо коррелируют друг с другом.

Конечным результатом факторного анализа является получение содержательно интерпретируемых факторов, воспроизводящих матрицу коэффициентов корреляции между переменными.

Применение факторного анализа в различных областях психологических наук показало, что определяемые факторы, как правило, хорошо интерпретируются как некоторые существенные внутренние характеристики изучаемых признаков (психологических особенностей субъектов).

В качестве начального этапа факторного анализа, так же как и других статистических методов, используется определение дисперсии каждого параметра x_j ($j = 1, 2, ..., n$) по определенному числу повторностей i ($i = 1, 2, ..., N$), а также попарное вычисление корреляции между всеми изучаемыми параметрами.

В модели ***классического факторного анализа*** требуется наилучшим образом аппроксимировать корреляции, причем основная модель анализа может быть записана в следующем виде:

$$z_j = a_{j1}F_1 + a_{j2}F_2 + ... + a_{jm}F_m + d_jU_j = \sum_{p=1}^{m} a_{jp}F_{pi} + d_jU_{ji} \quad (11.7)$$

($i = 1, 2, ..., N; j = 1, 2, ..., n$). В этом выражении z_j — общая нормированная дисперсия; $F_1, F_2, ..., F_m$ — ***общие факторы*** (как правило, $m < n$); U_j — ***характерный фактор***, который учитывает остаточную (связанную с различными погрешностями) дисперсию; $a_1, a_2, ..., a_m$, которые являются коэффициентами при факторах, называют ***нагрузками***. Другими словами, факторная нагрузка есть не что иное, как коэффициент корреляции между фактором и исследуемой переменной.

Классификация факторов

Фактор называется ***генеральным***, если все его нагрузки значительно отличаются от нуля, т. е. он имеет нагрузки от всех переменных.

Фактор называется ***общим***, если хотя бы две его нагрузки значительно отличаются от нуля (т. е. он имеет нагрузки от двух и более переменных). Число высоких нагрузок переменной на общие факторы называется ее ***сложностью***.

Одной из особенностей факторного анализа является понятие ***компонентов дисперсии***.

Общность параметра z_j, связанная с общими факторами, представляет собой часть единичной дисперсии переменной, которую можно приписать общим факторам. Она равна квадрату коэффициента множественной корреляции между переменной и общими факторами, т. е. сумме квадратов факторных нагрузок:

$$h_j^2 = a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + ... + a_{jm}^2 \qquad (11.8)$$

(j = 1, 2, ..., n). По сути дела, общности представляют собой диагональные элементы матрицы корреляций между исследуемыми переменными.

Характерность представляет собой часть единичной дисперсии переменной, которая не связана с общими факторами, т. е. вклад характерного фактора U_{ji}. Характерность показывает, насколько в общих факторах учтена суммарная дисперсия параметра. Характерность можно разбить на две составляющие — *специфичность* и *дисперсию, обусловленную ошибкой*.

Специфичность — доля характерности, которая тем или иным образом связана с действительной спецификой изучаемого параметра.

Дисперсия ошибки (ненадежность) параметра связана с несовершенством измерений.

Надежность есть разница между полной дисперсией и дисперсией ошибки, т. е. представляет собой сумму общности и специфичности. Значение надежности является верхней границей общности. Разница между надежностью и общностью является мерой специфической дисперсии, присущей только одной определенной переменной. Переменные, характеризующиеся малой надежностью, в факторный анализ включаться не должны.

В математическом выражении компоненты дисперсии выглядят следующим образом:

1) полная дисперсия: $r_j^2 = h_j^2 + b_j^2 + e_j^2 = h_j^2 + d_j^2 = 1$; (11.9)

2) надежность: $r_{ij} = h_j^2 + b_j^2 = 1 - e_j^2$; (11.10)

3) общность: $h_j^2 = 1 - d_j^2$; (11.11)

4) характерность: $d_j^2 = b_j^2 + e_j^2 = 1 - h_j^2$; (11.12)

5) специфичность: $b_j^2 = d_j^2 - e_j^2$; (11.13)

6) дисперсия ошибки: $e_j = 1 = r_{ij}$. (11.14)

Более наглядно соотношения компонентов дисперсии можно представить в виде следующей схемы (табл. 11.3):

Таблица 11.3

<table>
<tr><td colspan="3">Полиая дисперсия (s_j^2)</td></tr>
<tr><td>Общность h_j^2</td><td colspan="2">Характерность (d_j^2)</td></tr>
<tr><td>a_{i1}^2 a_{i2}^2 a_{i3}^2 ... a_{il}^2 ... a_{ir}^2</td><td>Специфичность (b_j^2)</td><td>Дисперсия ошибки (e_j^2)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Надежность (r_j^2)</td><td>Дисперсия ошибки (e_j^2)</td></tr>
</table>

Некоторые исследователи не вводят предположения о существовании специфических факторов и даже факторов ошибки. При этом число общих факторов m может быть меньше или равным числу параметров n.

Кроме алгебраического представления факторной модели, иногда используются геометрические представления о корреляциях между изучаемыми параметрами как множестве векторов в многомерном пространстве. При этом задача факторного анализа состоит в попарном измерении расстояний между векторами и выявлении областей сгущения векторов, соответствующих отдельным факторам.

11.3.2. Основные методы, используемые в факторном анализе

Метод главных компонент (компонентный анализ). Каждый из N объектов представляется в виде точки в n-мерном пространстве, каждая ось которого соответствует одному из параметров. Облако точек имеет форму, близкую к m-мерному эллипсоиду, и становится идеальным эллипсоидом в случае нормального распределения. Оси эллипсоида соответствуют главным компонентам.

Следовательно, в компонентном анализе производится вращение исходной системы координат к новой системе в полном пространстве параметров — ортогональное преобразование, при котором каждый из *n* параметров выражается через *n* главных компонент. Целью вращения является нахождение в пространстве общих факторов одной из возможных осей координат, которая должна быть наложена на конфигурацию векторов для получения факторной структуры. Важным свойством компонент является то, что каждая из них по порядку учитывает максимум суммарной дисперсии параметров. Другими словами, первая главная компонента есть линейная комбинация исходных параметров, учитывающая максимум их суммарной дисперсии; вторая главная компонента не коррелирует с первой и учитывает максимум оставшейся дисперсии и т. д. до тех пор, пока вся дисперсия не будет учтена. Сумма дисперсий всех главных компонент равна сумме дисперсий всех исходных параметров. При этом принято выражать параметры в стандартной форме, при которой дисперсия параметра равна единице (следовательно, суммарная дисперсия равна *n*).

Метод главных факторов. Представляет собой приложение метода главных компонент к редуцированной корреляционной матрице, у которой на главной диагонали стоят значения общностей. Выражение для определения коэффициентов при общих факторах записывается уравнением $z_j = a_{j1}F_1 + ... + a_{jp}F_p + ... + a_{jm}F_m$ ($j = 1, 2, ..., n$), в котором не учитывается специфический фактор.

Сумма квадратов факторных коэффициентов дает значение общности данного параметра, а член a_{jp}^2 указывает на вклад фактора F_p в общность параметра z_j.

На первой стадии анализа ищут коэффициенты при первом факторе так, чтобы сумма вкладов фактора в суммарную общность была максимальной. Эта сумма равна $V_1 = a_{11}^2 + a_{21}^2 + ... + a_{n1}^2$.

Для определения коэффициентов при втором факторе F_2 необходимо максимизировать функцию $V_2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + ... + a_{n2}^2$, которая представляет собой сумму вкладов F_2 в остаточную общность, и т. д.

В отличие от метода главных компонент, на главной диагонали стоят числа, меньшие единицы (оценки общностей), поэтому $m < n$. Процедура факторизации в данном случае несколько проще, нежели при использовании метода главных компонент, и процесс прекращается, когда сумма собственных значений становится равной суммарной общности n параметров.

Центроидный метод. Название метода происходит от понятия центроида, или центра тяжести. Поскольку параметры можно рассматривать как набор n векторов в m-мерном пространстве, где m — число общих факторов, то скалярное произведение любой пары векторов соответствует коэффициенту корреляции между соответствующими векторами (напомним, что величина коэффициента корреляции равна косинусу угла между двумя векторами).

Процедура анализа состоит в повороте системы координат таким образом, чтобы первая ось проходила через начало координат и центр тяжести n точек концов векторов. После этого можно вычислить проекции векторов (координаты параметров) на первую ось новой системы. С помощью специальных алгоритмов определяются коэффициенты при первом центроидном факторе.

Для нахождения второго фактора вычисляют матрицу первых остатков. Остаточные корреляции вычисляются как скалярные произведения пар остаточных векторов в пространстве $m - 1$ измерений. Процедура последовательно повторяется до тех пор, пока не будут вычислены факторные веса и нагрузки всех остальных факторов.

В отличие от предыдущих методов, в центроидном методе используется процедура отражения, когда после вычисления нагрузки каждого фактора все оставшиеся отрицательные векторы поворачивают на 180° (напомним, что уровень связи не зависит от знака корреляции).

Метод минимальных остатков. Имеет ряд модификаций, из которых наиболее эффективным является метод последовательных замен (процедура Гаусса — Зейделя). Он представляет собой процедуру, в которой на каждом шаге производится небольшое изменение значений переменных (параметров) и вместо прежних значений принимаются эти новые значения. Если замены вводятся только в одну строку матрицы, то вычисленные коэффициенты

корреляции будут линейными, а целевая функция — квадратичной функцией этих замен. Процесс поочередно повторяется для всех параметров; последовательно получаются приближения строк факторных нагрузок, минимизирующих целевую функцию.

Метод максимума правдоподобия. Стоит несколько особняком среди других методов факторного анализа, поскольку направлен на статистическую оценку адекватности исходной теоретической модели исследуемой корреляционной матрице (при фиксированном числе факторов). Метод максимума правдоподобия позволяет на основании гипотезы о числе общих факторов и выборки из N наблюдений набора в n параметров определить факторные нагрузки для генеральной совокупности. Алгебраические преобразования, используемые в этом методе, достаточно сложны, поэтому мы не будем на них останавливаться.

Групповой метод. В групповом методе факторы представляются осями координат, проходящими через центр тяжести отдельных групп параметров. Обычно такие группы не ортогональны одна другой, поэтому факторы могут также быть не ортогональными.

Исходным материалом для группового метода служит редуцированная корреляционная матрица со значениями общностей на главной диагонали, оцененными с помощью других методов. Работа начинается с группировки n параметров по m группам G_p ($p = 1, 2, ..., m$), полученным либо на основании априорных сведений, либо любым другим способом.

Групповой метод отличается тем, что после каждого фактора, получаемого на данном шаге, нет необходимости вычислять матрицу остаточных коэффициентов корреляции. Суть метода сводится к тому, что на каждом шаге можно вычислить несколько факторов, после чего достаточно подсчитать лишь одну матрицу остатков. Если число выбранных линейно независимых групп равно размерности пространства общих факторов, то достаточно лишь одной матрицы остатков; если же оценка числа групп занижена, то процесс повторяется.

Факторы, полученные на одном шаге, не ортогональны друг другу (косоугольная система координат), но факторы, полученные на разных шагах, взаимно ортогональны.

Примечание. Как отмечалось выше, большинство методов факторного анализа нсходит нз того, что распределення параметров в многомериом пространстве нмеют внд нормальных распределеннй. Отсюда гипотеза об ортогональностн векторов. Однако ннтерпретацию факторов не всегда можно совместить с требованием их некоррелнрованностн, т. е. ортогональности. Большннство факторов связано между собой. В случае неортогональности факторов используются косоугольные решення, и кроме рассмотренных выше методов факторного аиализа, существует ряд другнх (аналнтнческнх) методов (квартнмакс, варнмакс, облнмакс, квартнмнн, облимин и др.), рассчитанных на косоугольные решення.

11.3.3. Выбор числа факторов и оценка их значений

Существует ряд способов определения числа факторов, с которыми связаны исследуемые переменные величины. Наиболее надежный из них — определение вкладов F_1, F_2 ..., F_m в общую дисперсию. Обычно, если сумма вкладов первых m факторов составляет 90 % или 95 %, дальнейший анализ прекращают.

Минимальное число факторов, вызывающих корреляцию переменных, можно определить по значениям общностей (диагональных элементов корреляционной матрицы). Существуют различные способы предварительной оценки общностей, но ни один из них не имеет исчерпывающего теоретического обоснования. Эмпирически показано, что в среднем на каждый фактор должно приходиться 4—5 переменных.

Для оценки значений факторов обычно используют множественный регрессионный анализ, реже — другие методы. Мерой точности оценки значений фактора является коэффициент множественной корреляции между фактором и нагружаемыми его переменными.

11.3.4. Представление результатов факторного анализа

В результате факторного анализа, независимо от использованного метода, вычисляются две группы показателей:

а) ***факторные веса***, отражающие относительный вклад каждого из факторов в суммарную дисперсию (напомним, что факторные

веса могут варьировать от 0 до 1 и закономерно убывают для каждого последующего фактора);

б) ***факторные нагрузки*** (коэффициенты при факторах), которые отражают степень связи каждого из *n* исследуемых параметров с тем или иным фактором. Оптимальным способом представления данных является матрица упорядоченных факторных нагрузок, пример которой приводится в табл. 11.4.

Таблица 11.4

Матрица упорядоченных факторных нагрузок

Черта характера или темперамеита испытуемого	Фактор				
	1	2	3	4	5
Нейротизм	0,781		0,395		
Импульсивиость	0,779				
Тревожиость	0,727				
Циклотимиость	0,727				–0,292
Сила НС по торможеиию	–0,580	–0,444			
Подвижность иервных процессов	0,522		0,427		
Эмоциоиальиая лабильность		0,788			
Экстраверсия		0,768			
Дистимиость		–0,742			
Гипертимиость		0,704		0,334	
Демонстративиость		0,530		0,311	–0,437
Сеизитивность		0,259	0,753		
Чувствительиость иервиой системы			0,685		
Педаитичиость		0,459	0,558		
Сила НС по возбуждеиию				0,676	
Развитие 2-й сигиальной системы				0,622	
Уровеиь притязаиий	0,277	0,338		0,569	
Искренность высказываний					–0,731

Матрица отражает результаты тестирования нескольких десятков испытуемых на предмет некоторых черт характера и темперамента. Тестирование проводилось с использованием тестов Айзенка, Шмишека и ЧХТ, по которым определялось 18 отдельных характеристик испытуемых.

Можно видеть, что при упорядочении факторных нагрузок по каждому фактору (упорядочение производится от максимальной факторной нагрузки до минимальной) 18 исследованных характеристик группируются по пяти факторам (более корректно сказать — нагружают пять факторов), имея различную степень связи с каждым из них. В факторном анализе в первую очередь принято учитывать нагрузки больше 0,5, а малые нагрузки (меньше 0,25) вообще не учитываются. По данным табл. 11.4 видно, что первые шесть индивидных характеристик (нейротизм, импульсивность, тревожность, циклотимность, сила нервной системы (НС) по торможению и подвижность нервных процессов) нагружают первый фактор ($a_1 > 0{,}5$), причем сила НС по торможению нагружает этот фактор с отрицательным, а остальные черты — с положительным знаком. Пять следующих характеристик нагружают второй, три черты — третий, три — четвертый и только одна характеристика — пятый фактор. В то же время можно видеть, что один и тот же параметр может нагружать два или даже три фактора, хотя эти дополнительные нагрузки относительно невелики.

Что касается явления, когда разные параметры нагружают один и тот же фактор с разным знаком, то это явный признак того, что они отрицательно коррелируют между собой.

Несмотря на то, что в приведенном примере исследованы характеристики индивида, имеющие в основном отношение к эмоциональной сфере, можно заметить, что природа (или — глубинная сущность) этих психологических признаков неоднородна (следует напомнить, что разные факторы по определению не коррелируют друг с другом). В то же время одна из характеристик (имеется в виду искренность или ложность высказываний), которая в некоторых тестовых методиках формирует «шкалу лжи», вообще оказалась не связанной с характеристиками эмоциональной сферы.

Кроме матриц упорядоченных факторных нагрузок, иногда используется графическое выражение результатов факторного анализа. В данном случае факторы на графике представлены осями координат (например, $x = F_1, y = F_2; x = F_2, y = F_3$ и т. д.), а исследуемые переменные — точками. Расположение точек на графике соответствует степени тяготения (величине факторной нагрузки) к тому или иному фактору. Более детальную информацию по этому вопросу можно получить в соответствующих источниках, которые указаны в перечне рекомендуемой литературы.

ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ

4.1. Квартили: $Q_1 = 88$, $Q_2 = 100{,}5$, $Q_3 = 108$.

Бимодальное распределение: $\text{Mo}_1 = 88$, $\text{Mo}_2 = 103$.

$Md = 100{,}5$; $\text{IQ}_{\text{ср}} = 99{,}1$.

4.2. Средний балл успеваемости у девочек 3,75, у мальчиков — 3,58 (для усреднения данных необходимо воспользоваться средневзвешенным арифметическим значением).

4.3. $x_g = 2{,}818$.

5.1. $T_{\max} - T_{\min} = 55$ мс; $Q = 21$ мс; $Q_{1/2} = 10{,}5$ мс; $MD = 11{,}84$; $\sigma_x^2 = 219{,}918$; $\sigma_x = 14{,}830$; $V_x = 10{,}17$ %. Процентные соотношения частот в 8-классовом распределении 0, 0, 17, 43, 22, 14, 4, 0. Размах распределения составляет 3,71 стандартного отклонения.

5.2. Средние значения: $x_1 = 35{,}2$; $x_2 = 37{,}5$.

Стандартные отклонения: $\sigma_1 = 6{,}87$; $\sigma_2 = 7{,}169$.

Коэффициенты вариаций: $V_1 = 0{,}195$ (19,5 %); $V_2 = 0{,}191$ (19,1 %).

Средние значения и стандартные отклонения для первой группы испытуемых несколько ниже, чем для второй. Для коэффициентов вариации соотношения обратные.

6.1. $As = 0{,}687 > As_{\text{кр}} = 0{,}53$; $Ex = -0{,}496 < Ex_{\text{кр}} = 0{,}85$. Для уровня значимости 0,95 распределение статистически достоверно отличается от нормального по коэффициенту асимметрии ($As > As_{\text{кр}}$).

6.2. $\chi^2 = 54{,}17 > \chi^2_{\text{кр}} = 22{,}4$; 27,7; 34,5. $\lambda = 1{,}66$. По критерию хи-квадрат и критерию Колмогорова экспериментальное распределение статистически достоверно отличается от нормального.

6.3. $T_{\text{ср}} = 130$ мс; $\sigma_T = 15{,}275$; $As = 0{,}631$; $Ex = 0{,}558$. По коэффициенту асимметрии распределение статистически достоверно отличается от нормального ($As > As_{\text{кр}} = 0{,}39$), по показателю эксцесса — не отличается от такового ($Ex < Ex_{\text{кр}} = 0{,}83$).

6.4. Для всех медалей: $\chi^2 = 0{,}101 < \chi^2_{\text{ст}}$ (различия недостоверны); для золотых медалей $\chi^2 = 0{,}643 < \chi^2_{\text{ст}}$ (различия недостоверны); для серебряных медалей $\chi^2 = 3{,}855 > \chi^2_{\text{ст}} = 3{,}84$ (различия статистически

достоверны). Вывод: девушки получают серебряные медали достоверно чаще, чем юноши.

6.5. $P_{10}(0) = 0{,}001$; $P_{10}(1) = 0{,}010$; $P_{10}(2) = 0{,}044$; $P_{10}(3) = 0{,}117$; $P_{10}(4) = 0{,}205$; $P_{10}(5) = 0{,}246$; $P_{10}(6) = 0{,}205$; $P_{10}(7) = 0{,}117$; $P_{10}(8) = 0{,}044$; $P_{10}(9) = 0{,}010$; $P_{10}(10) = 0{,}001$.

6.6. $P_5(0) = 0{,}168$; $P_5(1) = 0{,}360$; $P_5(2) = 0{,}309$; $P_5(3) = 0{,}132$; $P_5(4) = 0{,}028$; $P_5(5) = 0{,}002$.

6.7. $P_{10}(1) = 0{,}347$; $P_{10}(2) = 0{,}276$; $P_{10}(3) = 0{,}130$.

6.8. $P_{ср} = 0{,}00253$; $P_{1000}(1) = 0{,}202$; $P(2) = 0{,}255$; $P(3) = 0{,}215$.

7.1. $U = 133 < U_{кр} = 138$; $t = 1{,}92 < t_{кр} = 2{,}03$; $F = 3{,}68 < F_{кр} = 4{,}10$. По критерию Стьюдента и по критерию Фишера различия показателей нейротизма у юношей и девушек статистически недостоверны, по критерию Манна — Уитни — достоверны для 1-го уровня значимости. Очевидно, что в данном случае следует отдать приоритет параметрическим критериям и сделать общий вывод о недостоверности различий между двумя группами.

7.2. $t = 1{,}28 < t_{кр} = 2{,}00$; $F = 1{,}76 < F_{кр} = 4{,}01$. Различия между показателями РДО у юношей и девушек статистически недостоверны.

7.3. $U = U_{кр}$. По критерию Манна —Уитни различия между мальчиками и девочками по коэффициенту интеллекта лежат на границе достоверности.

7.4. Можно говорить о выраженности асимметрии, поскольку угловое преобразование Фишера дает статистически значимые различия: $\varphi^* > \varphi^*_{кр}$.

7.5. Различия статистически недостоверны, следовательно, связи между полом и количеством пропусков детского сада нет.

7.6. По критерию χ^2 Пирсона распределения IQ в студенческих группах различаются недостоверно.

7.7. В первом случае (ассоциация с яркими цветами сиюминутного настроения): $\varphi^* = 4{,}27$. Различия статистически достоверны.

Во втором случае (ассоциация прошлого): $\varphi^* = 0{,}97$. Различия недостоверны.

8.1. Коэффициент корреляции между экстраинтроверсией и нейротизмом близок к нулю, что свидетельствует об отсутствии связи между этими характеристиками и подтверждает концепцию Г. Айзенка.

8.2. $r_{xy} = -0{,}43 > r_{кр} = 0{,}28$. Вывод: гипертимность и дистимность, по Шмишеку, связаны между собой достоверной отрицательной связью.

8.3. Связь между импульсивностью и нейротизмом для данной выборки статистически достоверна для 2-го уровня значимости: $r_{xy} = = 0{,}786 > r_{кр} = 0{,}77$).

8.4. $r_s = 0{,}503 < r_{кр}$. Связь между знаниями по биологии и математике не является статистически достоверной.

8.5. Между коэффициентом интеллекта и уровнем успеваемости существует слабая положительная связь ($r_s = 0{,}250 < r_{кр} = 0{,}63$; $\tau = 0{,}211 < \tau = 0{,}51$), которая не является статистически значимой.

8.6. $\varphi = 0{,}365 > \varphi_{кр} = 0{,}35$. Корреляция с полом положительна и статистически достоверна для 1-го уровня значимости. Юноши чаще, чем девушки, посещают дискотеку.

8.7. Связь между полом и уровнем экстраинтроверсии не является статистически значимой ($r_{pb} = 0{,}085$).

8.8. Для данной выборки связь между УЛТ и типом темперамента статистически достоверна для 1-го и 2-го уровня значимости ($r_{pb} = 0{,}673 > r_{кр} = 0{,}51; 0{,}64$).

8.9. Корреляция между импульсивностью и экзальтированностью для данной выборки испытуемых статистически недостоверна ($r_{xy} = 0{,}346 < r_{кр} = 0{,}63$).

8.10. Между полом и средним баллом аттестата существует очень слабая, статистически недостоверная отрицательная корреляция ($r_{pb} = -0{,}143$).

8.11. 11 «А» выступил чуть более успешно, чем 11 «Б», тем не менее корреляция между классами и призовыми местами очень слабая и не является статистически значимой ($r_{rb} = 0{,}167 < r_{кр}$).

8.12. Коэффициент корреляции числа ошибок с вербальным интеллектом составляет 0,019, с невербальным — 0,538 при критическом значении 0,63. Связи между количеством ошибок, допущенных на тренажере, и коэффициентом интеллекта по Векслеру нет.

8.13. Коэффициент корреляции Пирсона равен 0,507, коэффициент Спирмена — 0,497. Критическое значение коэффициентов корреляции для 1-го уровня значимости равно 0,47. Вывод: депутат соответствует эталону.

8.14. $r_s = 0{,}639 > r_{кр} = 0{,}44; 0{,}56$; $\tau = 0{,}484 > \tau_{кр} = 0{,}33; 0{,}43$. Корреляция значима для 1-го и 2-го уровней. Обратите внимание, что шкалы x и y инвертированы относительно друг друга, поэтому корреляцию между эмоциональной устойчивостью и степенью заикания следует считать отрицательной.

8.15. Коэффициент корреляции Пирсона $r_{xy} = 0{,}885 > r_{кр}$; коэффициент Спирмена $r_s = 0{,}903 > r_{кр}$ (при ранжировании показателей шкал MMPI). Профили значимо коррелируют; следовательно, существенных изменений за 2,5 года не произошло.

8.16. Если соотношение ответов разных категорий у данных групп испытуемых будет различно, то мы не обнаружим значимой корреляции между группами. Так как нас интересует соотношение ответов, то мы должны использовать ранговую корреляцию. По вычисленным коэффициентам корреляции Спирмена строится корреляционная матрица. Если коэффициенты корреляции выше критического значения, то такие группы различаться не будут. $r_{кр} = 0{,}61$ (0,05) и $r_{кр} = 0{,}76$ (0,99).

Вывод: по соотношению категорий ответов нельзя различить группы:

— норма и невротики ($r_s = 0{,}86$);
— норма и эпилептики ($r_s = 0{,}64$);
— невротики и шизофреники ($r_s = 0{,}63$);
— невротики и эпилептики ($r_s = 0{,}68$);
— шизофреники и эпилептики ($r_s = 0{,}77$);
— заключенные и эпилептики ($r_s = 0{,}86$).

8.17. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена (без поправок) равен 0,94. Вывод: соотношение ответов коррелирует между собой; говорить о различии мужской и женской групп нет оснований.

8.18. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена для терминальных ценностей составляет 0,74, для инструментальных — 0,72, что выше критических значений для 1-го и 2-го уровней значимости.

Вывод: структура ценностей у юношей и девушек значимо коррелируют друг с другом.

8.19. Находим ранг каждого цвета при определении социальных стереотипов и вычисляем коэффициенты ранговой корреляции Спирмена. Критические значения составляют 0,72 (0,95) и 0,88 (0,99). Если коэффициенты корреляции являются значимо положи-

тельными, то социальные стереотипы близки, если же значимо отрицательными, то данные понятия взаимоисключают друг друга.

Вывод: противоположны по смыслу следующие понятия:

— друг — предатель ($r_s = -0{,}74$);

— отшельник — клоун ($r_s = -0{,}86$);

— клоун — предатель ($r_s = -0{,}74$);

— божий одуванчик — полковник ($r_s = -0{,}76$).

9.1. Логарифмическая функция типа $R = 2{,}375 \lg m - 2{,}292$; $\sigma = 0{,}171$; $\sigma_b = 0{,}048$.

9.2. Психофизические функции: $\lg R_1 = 0{,}676 \lg S - 0{,}681$ и $\lg R_2 = 0{,}671 \lg S - 0{,}577$.

Для 1-го испытуемого: $b = 0{,}676$; $a = -0{,}681$; $\sigma = 0{,}026$; $\sigma_b = 0{,}022$. Для 2-го испытуемого: $b = 0{,}671$; $a = -0{,}577$; $\sigma = 0{,}056$; $\sigma_b = 0{,}048$. Поскольку $b_1 = 0{,}676 \pm 0{,}052$ и $b_2 = 0{,}671 \pm 0{,}111$, следовательно, различия между психофизическими функциями статистически недостоверны.

9.3. Психофизическая функция типа $\lg R = 0{,}334 \lg B + 0{,}020$. $b = 0{,}334$; $a = 0{,}020$; $\sigma = 0{,}019$; $\sigma_b = 0{,}0006$.

9.4. Степенная (двойная логарифмическая) функция типа $\lg L = 0{,}856 \lg T + 1{,}443$. $b = 0{,}856$; $a = 1{,}443$; $\sigma = 0{,}029$; $\sigma_b = 0{,}006$.

10.1. $\eta_x^2 = 0{,}22$; $F = 3{,}38 > F_{st} = 2{,}86$. Влияние сеансов НЛП как фактора достоверно для 1-го уровня значимости.

10.2. Для экстраинтроверсии $\eta_x^2 = 0{,}008$; $F = 0{,}098$; для нейротизма $\eta_x^2 = 0{,}057$; $F = 0{,}728 < F_{ст} = 2{,}86$. Изменение экстраинтроверсии и нейротизма с возрастом статистически недостоверно.

10.3. $\eta_x^2 = 0{,}22$; $F = 3{,}38 > F_{ст} = 2{,}86$. Изменение уровня личностной тревожности с возрастом у подростков статистически достоверно для 1-го уровня значимости.

10.4. $\eta_x^2 = 0{,}177$; $F = 2{,}902 < F_{ст} = 3{,}35$. Влияние мотивации как фактора на успешность запоминания не является достоверным.

10.5. По критерию знаков $s = 5 : 15$ ($s_{кр} = 6 : 14$). По критерию Вилкоксона $T = 78{,}5$ ($T_{кр} = 91$). Вывод: влияние КГА как фактора статистически достоверно для уровня значимости $\beta_1 = 0{,}95$.

10.6. $\eta_x^2 = 0{,}198$; $F = 5{,}64 > F_{ст} = 3{,}16$. Уровень активности статистически значимо влияет на артериальное давление.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

Артемьева Е. Ю. Вероятностные методы в психологии / Е. Ю. Артемьева, Е. М. Мартынов. М. : Изд-во МГУ, 1975.

Гласс Дж. Статистические методы в педагогике и психологии / Дж. Гласс, Дж. Стэнли. М. : Прогресс, 1976.

Лупандин В. И. Математические методы в психологии : учеб. пособие / В. И. Лупандин. Екатеринбург : Урал. гос. ун-т, 1996; Екатеринбург: Гуманитар. ун-т, 1997 (2-е изд.); Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2002 (2-е изд.).

Лупандин В. И. Сборник задач по курсу «Математические методы в психологии» : учеб.-метод. пособие / В. И. Лупандин, А. В. Зайцев. Екатеринбург, 2000.

Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии / Е. В. Сидоренко. СПб. : Соц. психол. центр, 1996.

Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии / Е. В. Сидоренко. СПб. : Речь, 2001.

Суходольский Г. В. Основы математической статистики для психологов / Г. В. Суходольский. Л. : Изд-во ЛГУ, 1972.

Дополнительная

Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ / Т. Андерсон. М. : Физматгиз, 1963.

Бикел П. Математическая статистика / П. Бикел, К. Доксум. М. : Финансы и статистика, 1983. Вып. 1, 2.

Боровков А. А. Математическая статистика / А. А. Боровков. М. : Наука, 1984.

Боровков А. А. Теория вероятностей / А. А. Боровков. М. : Наука, 1976.

Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. М. : Наука, 1969.

Дюран Б. Кластерный анализ / Б. Дюран, П. Оделл. М. : Статистика, 1977.

Ефимова М. Р. Общая теория статистики : учеб. пособие / М. Р. Ефимова, Е. В. Петрова, В. Н. Румянцев. М. : ИНФРА-М, 1998.

Иберла К. Факторный анализ / К. Иберла. М. : Статистика, 1980.

Кемпбелл Д. Модели эксперимента в социальной психологии и прикладных исследованиях / Д. Кемпбелл. М. : Мир, 1980.

Кендалл Дж. Ранговые корреляции / Дж. Кендалл. М. : Мир, 1975.

Кендалл М. Дж. Статистические выводы и связи / М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. М. : Наука, 1973.

Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятности / А. Н. Колмогоров. М. : Наука, 1974.

Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. М. : Мир, 1974.

Налимов В. В. Теория эксперимента / В. В. Налимов. М. : Наука, 1971.

Оре О. Теория графов / О. Оре. М. : Наука, 1968.

Плохинский Н. А. Математические методы в биологии : учеб.-метод. пособие / Н. А. Плохинский. М. : Изд-во МГУ, 1978.

Рао С. Линейные статистические методы и их применения / С. Рао. М. : Наука, 1968.

Себер Дж. Линейный регрессионный анализ / Дж. Себер. М. : Мир, 1980.

Тюрин Ю. Н. Непараметрические методы статистики / Ю. Н. Тюрин. М. : Знание, 1978.

Уилкс С. Математическая статистика / С. Уилкс. М. : Наука, 1967.

Феллер Э. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / Э. Феллер. М. : Мир, 1967. Т. 1, 2.

Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей / Р. А. Фишер. М. : Госстатиздат, 1958.

Харман Г. Современный факторный анализ / Г. Харман. М. : Статистика, 1972.

Холлендер М. Непараметрические методы статистики / М. Холлендер, Д. А. Вульф. М. : Финансы и статистика, 1983.

Шеффе Г. Дисперсионный анализ / Г. Шеффе. М. : Физматгиз, 1963.

Эдвардс Р. Функциональный анализ / Р. Эдвардс. М. : Мир, 1969.

Справочные пособия и таблицы

Большев А. Н. Таблицы математической статистики / А. Н. Большев, Н. В. Смирнов. М. : Наука, 1965.

Оуэн Д. Б. Сборник статистических таблиц / Д. Б. Оуэн. М. : ВЦ АН СССР, 1973.

Янко Я. Математико-статистические таблицы / Я. Янко. М. : Госстатиздат, 1961.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица 1

Критические значения коэффициента асимметрии (As), используемого для проверки гипотезы о нормальности распределения

Объем выборки	Уровень значимости		Объем выборки	Уровень значимости		Объем выборки	Уровень значимости	
	0,95	0,99		0,95	0,99		0,95	0,99
25	0,71	1,06	100	0,39	0,57	500	0,18	0,26
30	0,66	0,98	125	0,35	0,51	550	0,17	0,24
35	0,62	0,92	150	0,32	0,46	600	0,16	0,23
40	0,59	0,87	175	0,30	0,43	650	0,16	0,22
45	0,56	0,82	200	0,28	0,40	700	0,15	0,22
50	0,53	0,79	250	0,25	0,36	750	0,15	0,21
60	0,49	0,72	300	0,23	0,33	800	0,14	0,20
70	0,46	0,67	350	0,21	0,30	850	0,14	0,20
80	0,43	0,63	400	0,20	0,28	900	0,13	0,19
90	0,41	0,60	450	0,19	0,27	1000	0,13	0,18

Таблица 2

Критические значения показателя эксцесса (Ex), используемого для проверки нормальности распределения

Объем выборки	Уровень значимости			Объем выборки	Уровень значимости		
	0,90	0,95	0,99		0,90	0,95	0,99
10	0,89	0,91	0,94	60	0,84	0,84	0,86
15	0,87	0,89	0,91	70	0,83	0,84	0,86
20	0,86	0,88	0,90	80	0,83	0,84	0,85

Окончание табл. 2

Объем выборки	Уровень значимости			Объем выборки	Уровень значимости		
	0,90	0,95	0,99		0,90	0,95	0,99
25	0,86	0,87	0,89	90	0,83	0,84	0,85
30	0,85	0,86	0,88	100	0,83	0,83	0,85
35	0,85	0,86	0,88	200	0,82	0,82	0,83
40	0,84	0,85	0,87	300	0,81	0,82	0,83
45	0,84	0,85	0,87	400	0,81	0,82	0,82
50	0,84	0,85	0,86	500	0,81	0,81	0,82

Таблица 3

Теоретические частоты 8-классового нормального распределения (шаг 1 σ)

Классовый интервал в единицах стандартного отклонения, σ	Среднее значение интервала	Частота	Накопленная частота
−4 ÷ −3	−3,5	0,13	0,13
−3 ÷ −2	−2,5	2,15	2,28
−2 ÷ −1	−1,5	13,59	15,87
−1 ÷ 0	−0,5	34,13	50,00
0 ÷ 1	0,5	34,13	84,13
1 ÷ 2	1,5	13,59	97,72
2 ÷ 3	2,5	2,15	99,87
3 ÷ 4	3,5	0,13	100,00

Таблица 4

Теоретические частоты 16-классового нормального распределения (шаг 0,5 σ)

Классовый интервал в единицах стандартного отклонения, σ	Среднее значение интервала	Частота	Накопленная частота
−4,0 ÷ −3,5	−3,75	0,02	0,02
−3,5 ÷ −3,0	−3,25	0,11	0,13
−3,0 ÷ −2,5	−2,75	0,50	0,63

Окончание табл. 4

Классовый интервал в единицах стандартного отклонения, σ	Среднее значение интервала	Частота	Накопленная частота
−2,5 ÷ −2,0	−2,25	1,65	2,28
−2,0 ÷ −1,5	−1,75	4,41	6,69
−1,5 ÷ −1,0	−1,25	9,18	15,87
−1,0 ÷ −0,5	−0,75	14,99	30,86
−0,5 ÷ 0	−0,25	19,14	50,00
0 ÷ 0,5	0,25	19,14	69,14
0,5 ÷ 1,0	0,75	14,99	84,13
1,0 ÷ 1,5	1,25	9,18	93,31
1,5 ÷ 2,0	1,75	4,41	97,72
2,0 ÷ 2,5	2,25	1,65	99,37
2,5 ÷ 3,0	2,75	0,50	99,87
3,0 ÷ 3,5	3,25	0,11	99,98
3,5 ÷ 4,0	3,75	0,02	100

Таблица 5

Значения z Пирсона
и соответствующие им теоретические накопленные частоты

Мера Пирсона, *z*	Накопленная частота, *F*	Мера Пирсона, *z*	Накопленная частота, *F*	Мера Пирсона, *z*	Накопленная частота, *F*
−4,0	0	−1,3	9,69	1,4	91,92
−3,9	0	−1,2	11,51	1,5	93,31
−3,8	0	−1,1	13,57	1,6	94,51
−3,7	0,01	−1,0	15,87	1,7	95,54
−3,6	0,01	−0,9	18,41	1,8	96,40
−3,5	0,02	−0,8	21,19	1,9	97,12
−3,4	0,03	−0,7	24,20	2,0	97,72
−3,3	0,05	−0,6	27,43	2,1	98,21
−3,2	0,07	−0,5	30,86	2,2	98,60
−3,1	0,09	−0,4	34,46	2,3	98,92
−3,0	0,13	−0,3	38,21	2,4	99,18
−2,9	0,18	−0,2	42,08	2,5	99,37
−2,8	0,25	−0,1	46,02	2,6	99,53

Окончание табл. 5

Мера Пирсона, z	Накопленная частота, F	Мера Пирсона, z	Накопленная частота, F	Мера Пирсона, z	Накопленная частота, F
–2,7	0,34	0	50,00	2,7	99,66
–2,6	0,47	0,1	53,98	2,8	99,75
–2,5	0,63	0,2	57,92	2,9	99,82
–2,4	0,82	0,3	61,79	3,0	99,87
–2,3	1,08	0,4	65,54	3,1	99,91
–2,2	1,40	0,5	69,14	3,2	99,93
–2,1	1,79	0,6	72,57	3,3	99,95
–2,0	2,28	0,7	75,80	3,4	99,97
–1,9	2,88	0,8	78,81	3,5	99,98
–1,8	3,60	0,9	81,59	3,6	99,99
–1,7	4,46	1,0	84,13	3,7	99,99
–1,6	5,49	1,1	86,14	3,8	100,00
–1,5	6,69	1,2	88,49	3,9	100,00
–1,4	8,08	1,3	90,31	4,0	100,00

Таблица 6

Стандартные значения хи-квадрат

Число степеней свободы, ν	Уровень значимости		Число степеней свободы, ν	Уровень значимости	
	0,95	0,99		0,95	0,99
1	3,841	6,635	30	43,773	50,892
2	5,991	9,210	31	44,985	52,191
3	7,815	11,345	32	46,194	53,486
4	9,488	13,277	33	47,400	54,776
5	11,070	15,086	34	48,602	56,061
6	12,592	16,812	35	49,802	57,342
7	14,067	18,475	36	50,998	58,619
8	15,507	20,090	37	52,192	59,892
9	16,919	21,666	38	53,384	61,162
10	18,307	23,209	39	54,572	62,428
11	19,675	24,725	40	55,758	63,691
12	21,026	26,217	42	58,124	66,206
13	22,362	27,688	44	60,481	68,709

Окончание табл. 6

Число степеней свободы, ν	Уровень значимости		Число степеней свободы, ν	Уровень значимости	
	0,95	0,99		0,95	0,99
14	23,685	29,141	46	62,830	71,201
15	24,996	30,578	48	65,2171	73,683
16	26,296	32,000	50	67,505	76,154
17	27,587	33,409	52	69,832	78,6163
18	28,869	34,805	54	72,153	81,069
19	30,144	36,191	56	74,468	85,513
20	31,410	37,566	58	76,778	85,950
21	32,671	38,932	60	79,082	88,379
22	33,924	40,289	65	84,821	94,422
23	35,172	41,638	70	90,631	100,425
24	36,415	42,980	75	96,217	106,393
25	37,652	44,314	80	101,879	112,329
26	38,885	45,642	85	107,522	118,236
27	40,113	46,963	90	113,145	124,116
28	41,337	48,278	95	118,752	129,973
29	42,557	49,588	100	124,342	135,807

Таблица 7

Уровень значимости различий между экспериментальным и теоретическим распределениями по критерию λ Колмогорова — Смирнова

λ	β	λ	β	λ	β	λ	β
0,37	0,001	0,76	0,390	1,15	0,858	1,54	0,983
0,38	0,001	0,77	0,406	1,16	0,864	1,55	0,984
0,39	0,002	0,78	0,423	1,17	0,871	1,56	0,985
0,40	0,003	0,79	0,440	1,18	0,877	1,57	0,986
0,41	0,004	0,80	0,456	1,19	0,882	1,58	0,986
0,42	0,005	0,81	0,472	1,20	0,888	1,59	0,987
0,43	0,007	0,82	0,488	1,21	0,893	1,60	0,988
0,44	0,009	0,83	0,504	1,22	0,898	1,61	0,989
0,45	0,013	0,84	0,519	1,23	0,903	1,62	0,989

Окончание табл. 7

λ	β	λ	β	λ	β	λ	β
0,46	0,016	0,85	0,535	1,24	0,908	1,63	0,990
0,47	0,020	0,86	0,550	1,25	0,912	1,64	0,991
0,48	0,025	0,87	0,565	1,26	0,916	1,65	0,991
0,49	0,030	0,88	0,579	1,27	0,921	1,66	0,992
0,50	0,036	0,89	0,593	1,28	0,924	1,67	0,992
0,51	0,043	0,90	0,607	1,29	0,928	1,68	0,993
0,52	0,050	0,91	0,621	1,30	0,932	1,69	0,993
0,53	0,059	0,92	0,634	1,31	0,935	1,70	0,994
0,54	0,068	0,93	0,647	1,32	0,939	1,71	0,994
0,55	0,077	0,94	0,660	1,33	0,942	1,72	0,995
0,56	0,088	0,95	0,673	1,34	0,945	1,73	0,995
0,57	0,099	0,96	0,685	1,35	0,948	1,74	0,995
0,58	0,110	0,97	0,696	1,36	0,951	1,75	0,996
0,59	0,123	0,98	0,708	1,37	0,953	1,76	0,996
0,60	0,136	0,99	0,719	1,38	0,956	1,77	0,996
0,61	0,149	1,00	0,730	1,39	0,958	1,78	0,996
0,62	0,163	1,01	0,741	1,40	0,960	1,79	0,997
0,63	0,178	1,02	0,751	1,41	0,962	1,80	0,997
0,64	0,193	1,03	0,761	1,42	0,964	1,81	0,997
0,65	0,208	1,04	0,770	1,43	0,967	1,82	0,997
0,66	0,224	1,05	0,780	1,44	0,968	1,83	0,998
0,67	0,240	1,06	0,789	1,45	0,970	1,84	0,998
0,68	0,256	1,07	0,798	1,46	0,972	1,85	0,998
0,69	0,272	1,08	0,806	1,47	0,973	1,86	0,998
0,70	0,289	1,09	0,814	1,48	0,975	1,87	0,998
0,71	0,305	1,10	0,822	1,49	0,976	1,88	0,998
0,72	0,322	1,11	0,829	1,50	0,978	1,89	0,998
0,73	0,339	1,12	0,837	1,51	0,979	1,90	0,999
0,74	0,356	1,13	0,844	1,52	0,980	1,91	0,999
0,75	0,373	1,14	0,851	1,53	0,981	1,92	0,999

Таблица 8

Критические значения критерия Q Розенбаума

Уровень значимости 0,95

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
11	6															
12	6	6														
13	6	6	6													
14	7	7	6	6												
15	7	7	6	6	6											
16	7	7	7	7	6	6										
17	7	7	7	7	7	7	7									
18	7	7	7	7	7	7	7	7								
19	7	7	7	7	7	7	7	7	7							
20	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7						
21	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7					
22	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7				
23	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7			
24	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7		
25	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	
26	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7

Уровень значимости 0,99

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
11	9															
12	9	9														
13	9	9	9													
14	9	9	9	9												
15	9	9	9	9	9											
16	9	9	9	9	9	9										
17	10	9	9	9	9	9	9									
18	10	10	9	9	9	9	9	9								
19	10	10	10	9	9	9	9	9	9							
20	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9						
21	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9					
22	11	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9				
23	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9			
24	12	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9		
25	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9	
26	12	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9

Таблица 9

Критические значения критерия U Манна — Уитни для уровня значимости 0,95

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	0	1	2	4										
6	0	2	3	5	7									
7	0	2	4	6	8	11								
8	1	3	5	8	10	13	15							
9	1	4	6	9	12	15	18	21						
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27					
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34				
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42			
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51		
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
4	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
5	19	20	22	23	25	26	28	29	31	32	33	35	36	38
6	25	26	28	30	32	34	36	37	39	41	43	45	47	48
7	30	33	35	37	39	41	44	46	48	50	53	55	57	59
8	36	39	41	44	47	49	52	55	57	60	62	65	68	70
9	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	79	82
10	48	51	55	58	62	65	69	72	75	79	82	86	89	93
11	54	57	61	65	69	73	77	81	85	89	93	96	100	104
12	60	64	68	72	77	81	85	90	94	98	103	107	111	116
13	65	70	75	80	84	89	94	99	103	108	113	118	122	127
14	71	77	82	87	92	97	102	107	113	118	123	128	133	139
15	77	83	88	94	100	105	111	116	122	128	133	139	144	150
16	83	89	95	101	107	113	119	125	131	137	143	150	156	162
17	89	96	102	109	115	121	128	134	141	147	154	160	167	173
18	95	102	109	116	123	130	136	143	150	157	164	171	178	185
19	101	109	116	123	130	138	145	152	160	167	174	182	189	196
20	107	115	123	130	138	146	154	161	169	177	185	193	200	208
21	113	121	130	138	146	154	162	170	179	187	195	203	212	220
22	119	128	136	145	154	162	171	180	188	197	206	214	223	232

Таблица 10

Стандартные значения критерия Стьюдента

Число степеней свободы, ν	Уровень значимости			Число степеней свободы, ν	Уровень значимости		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
1	12,71	63,66	636,62	19	2,09	2,86	3,88
2	4,30	9,92	31,60	20	2,09	2,85	3,85
3	3,18	5,84	12,94	21	2,08	2,83	3,82
4	2,78	4,60	8,61	22	2,07	2,82	3,79
5	2,57	4,03	6,86	23	2,07	2,81	3,77
6	2,45	3,71	5,96	24	2,06	2,80	3,74
7	2,36	3,50	5,40	25	2,06	2,79	3,72
8	2,31	3,36	5,04	26	2,06	2,78	3,71
9	2,26	3,25	4,78	27	2,05	2,77	3,69
10	2,23	3,17	4,59	28	2,05	2,76	3,66
11	2,20	3,11	4,49	29	2,05	2,76	3,66
12	2,18	3,05	4,32	30	2,05	2,76	3,66
13	2,16	3,01	4,22	35	2,04	2,75	3,65
14	2,14	2,98	4,14	40	2,02	2,70	3,55
15	2,13	2,95	4,07	60	2,00	2,66	3,46
16	2,12	2,92	4,01	120	1,98	2,62	3,37
17	2,11	2,90	3,96	∞	1,96	2,58	3,29
18	2,10	2,88	3,92				

Таблица 11

Стандартные значения критерия Фишера, используемые для оценки достоверности различий между двумя выборками

Число степеней свободы, ν	Уровень значимости			Число степеней свободы, ν	Уровень значимости		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
3	10,13	34,12	167,5	28	4,20	7,64	13,5
4	7,71	21,20	74,1	29	4,18	7,60	13,4
5	6,61	16,26	47,0	30	4,17	7,56	13,3
6	5,99	13,74	35,5	32	4,15	7,50	13,2
7	5,59	12,25	29,2	34	4,13	7,44	13,1
8	5,32	11,26	25,4	36	4,11	7,39	13,0

Окончание табл. 11

Число степеней свободы, ν	Уровень значимости			Число степеней свободы, ν	Уровень значимости		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
9	5,12	10,56	22,9	38	4,10	7,35	12,9
10	4,96	10,04	21,0	40	4,08	7,31	12,8
11	4,84	9,65	19,7	42	4,07	7,27	12,7
12	4,75	9,33	18,6	44	4,06	7,24	12,5
13	4,67	9,07	17,8	46	4,05	7,21	12,4
14	4,60	8,86	17,1	48	4,04	7,19	12,3
15	4,54	8,68	16,6	50	4,03	7,17	12,2
16	4,49	8,53	16,1	55	4,02	7,12	12,1
17	4,45	8,40	15,7	60	4,00	7,08	12,0
18	4,41	8,28	15,4	65	3,99	7,04	11,9
19	4,38	8,18	15,1	70	3,98	7,01	11,6
20	4,35	8,10	14,8	80	3,96	6,96	11,6
21	4,32	8,02	14,6	100	3,94	6,90	11,5
22	4,30	7,94	14,4	125	3,92	6,84	11,4
23	4,28	7,88	14,2	150	3,91	6,81	11,3
24	4,26	7,82	14,0	200	3,89	6,76	11,2
25	4,24	7,77	13,9	400	3,86	6,70	11,0
26	4,22	7,72	13,7	1000	3,85	6,66	10,9
27	4,21	7,68	13,6	∞	3,84	6,64	10,8

Таблица 12

Величины угла φ в радианах для разных процентных долей (угловое преобразование Фишера)

Доля (P), %	φ, рад.	Доля (P), %	φ, рад.	Доля (P), %	φ, рад.	Доля (P), %	φ, рад.
0,1	0,063	17	0,850	51	1,591	85	2,346
0,2	0,090	18	0,876	52	1,611	86	2,375
0,3	0,110	19	0,902	53	1,631	87	2,404
0,4	0,127	20	0,927	54	1,651	88	2,434
0,5	0,142	21	0,952	55	1,671	89	2,466
0,6	0,155	22	0,976	56	1,691	90	2,498
0,7	0,168	23	1,000	57	1,711	90,5	2,515
0,8	0,179	24	1,024	58	1,732	91,0	2,532

Окончание табл. 12

Доля (Р), %	φ, рад.	Доля (Р), %	φ, рад.	Доля (Р), %	φ, рад.	Доля (Р), %	φ, рад.
0,9	0,190	25	1,047	59	1,752	91,5	2,550
1,0	0,200	26	1,070	60	1,772	92,0	2,568
1,5	0,246	27	1,093	61	1,793	92,5	2,587
2,0	0,284	28	1,115	62	1,813	93,0	2,606
2,5	0,318	29	1,137	63	1,834	93,5	2,626
3,0	0,348	30	1,159	64	1,855	94,0	2,647
3,5	0,376	31	1,181	65	1,876	94,5	2,668
4,0	0,403	32	1,202	66	1,896	95,0	2,691
4,5	0,428	33	1,224	67	1,918	95,5	2,714
5,0	0,451	34	1,245	68	1,939	96,0	2,739
5,5	0,474	35	1,266	69	1,961	96,5	2,765
6,0	0,495	36	1,287	70	1,982	97,0	2,793
6,5	0,516	37	1,308	71	2,004	97,5	2,824
7,0	0,536	38	1,328	72	2,026	98,0	2,896
7,5	0,555	39	1,349	73	2,049	99,0	2,941
8,0	0,574	40	1,369	74	2,072	99,1	2,952
8,5	0,592	41	1,390	75	2,094	99,2	2,962
9,0	0,609	42	1,410	76	2,118	99,3	2,974
9,5	0,627	43	1,430	77	2,141	99,4	2,987
10	0,644	44	1,450	78	2,165	99,5	3,000
11	0,676	45	1,471	79	2,190	99,6	3,015
12	0,708	46	1,491	80	2,214	99,7	3,032
13	0,738	47	1,511	81	2,240	99,8	3,052
14	0,767	48	1,531	82	2,265	99,9	3,078
15	0,795	49	1,551	83	2,292	100	3,142
16	0,823	50	1,571	84	2,319		

Таблица 13

Критические значения коэффициентов корреляции Пирсона и Спирмена

Степень свободы $n-2$	Уровень значимости		Степень свободы $n-2$	Уровень значимости		Степень свободы $n-2$	Уровень значимости	
	0,95	0,99		0,95	0,99		0,95	0,99
5	0,75	0,87	20	0,42	0,54	60	0,25	0,33
6	0,71	0,83	21	0,41	0,53	70	0,23	0,30
7	0,67	0,80	22	0,40	0,52	80	0,22	0,28
8	0,63	0,77	23	0,40	0,51	90	0,21	0,27
9	0,60	0,74	24	0,39	0,50	100	0,20	0,25
10	0,58	0,71	25	0,38	0,49	125	0,17	0,23
11	0,55	0,68	26	0,37	0,48	150	0,16	0,21
12	0,53	0,66	27	0,37	0,47	200	0,14	0,18
13	0,51	0,64	28	0,36	0,46	300	0,11	0,15
14	0,50	0,62	29	0,36	0,46	400	0,10	0,13
15	0,48	0,61	30	0,35	0,45	500	0,09	0,12
16	0,47	0,59	35	0,33	0,42	700	0,07	0,10
17	0,46	0,58	40	0,30	0,39	900	0,06	0,09
18	0,44	0,56	45	0,29	0,37	1000	0,06	0,09
19	0,43	0,55	50	0,27	0,35			

Таблица 14

Критические значения коэффициента τ Кендалла

Объем выборкн	Уровень значимости			Объем выборкн	Уровень значимости		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	0,91			13	0,43	0,56	0,71
6	0,77	0,98		14	0,41	0,54	0,68
7	0,71	0,87		15	0,39	0,51	0,65
8	0,61	0,79	0,99	16	0,38	0,49	0,62
9	0,56	0,72	0,91	17	0,36	0,47	0,60
10	0,51	0,67	0,84	18	0,35	0,46	0,58
11	0,48	0,63	0,79	19	0,34	0,44	0,56
12	0,45	0,59	0,75	20	0,33	0,43	0,54

Таблица 15

Число пар значений, достаточное для статистической значимости коэффициентов корреляции Пирсона и Спирмена

r	Уровень значимости			r	Уровень значимости		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
0,01	38407	66503	108903	0,46	19	30	47
0,02	9603	16628	27228	0,47	18	29	45
0,03	4269	7392	12103	0,48	17	27	43
0,04	2403	4159	6809	0,49	16	26	41
0,05	1539	2263	4359	0,50	16	25	39
0,06	1069	1850	3028	0,51	15	24	37
0,07	787	1360	2225	0,52	15	23	36
0,08	604	1042	1704	0,53	14	22	34
0,09	477	824	1347	0,54	14	21	33
0,10	383	661	1081	0,55	13	20	32
0,11	317	548	896	0,56	13	20	30
0,12	267	462	754	0,57	12	19	29
0,13	228	392	640	0,58	12	18	28
0,14	196	337	550	0,59	11	18	27
0,15	171	295	481	0,60	11	17	26
0,16	151	259	422	0,61	11	16	25
0,17	133	228	373	0,62	10	16	24
0,18	119	204	332	0,63	10	15	23
0,19	107	183	297	0,64	10	15	22
0,20	97	165	270	0,65	9	14	21
0,21	87	149	242	0,66	9	14	20
0,22	80	136	211	0,67	9	13	20
0,23	73	124	202	0,68	9	13	19
0,24	68	114	185	0,69	8	12	18
0,25	62	105	170	0,70	8	12	18
0,26	57	97	157	0,71	8	11	17
0,27	53	90	145	0,72	8	11	16
0,28	49	83	135	0,73	7	11	16
0,29	46	78	125	0,74	7	10	15
0,30	43	73	117	0,75	7	10	15

Окончание табл. 15

r	Уровень значимости			r	Уровень значимости		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
0,31	40	68	109	0,76	7	10	14
0,32	38	63	102	0,77	7	9	14
0,33	36	60	96	0,78	7	9	13
0,34	34	56	90	0,79	6	9	13
0,35	32	53	85	0,80	6	9	12
0,36	30	50	80	0,81	6	8	12
0,37	28	47	75	0,82	6	8	11
0,38	27	44	71	0,83	6	8	11
0,39	26	42	67	0,84	6	7	10
0,40	24	40	64	0,85	5	7	10
0,41	23	38	60	0,86	5	7	10
0,42	22	36	57	0,87	5	7	9.
0,43	21	34	55	0,88	5	7	9
0,44	20	33	52	0,89	5	6	8
0,45	19	31	49	0,90	5	6	8

Таблица 16

Критические значения
дихотомического коэффициента корреляции φ

Объем выборки	Уровень значимости			Объем выборки	Уровень значимости		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	0,88			26	0,39	0,51	0,65
6	0,81			28	0,38	0,49	0,63
7	0,75	0,98		30	0,36	0,48	0,61
8	0,70	0,92		35	0,34	0,44	0,56
9	0,66	0,86		40	0,31	0,41	0,53
10	0,62	0,82		45	0,30	0,39	0,50
11	0,60	0,78	1,00	50	0,28	0,37	0,47
12	0,57	0,75	0,95	60	0,26	0,34	0,43
13	0,55	0,72	0,92	70	0,24	0,31	0,40
14	0,53	0,69	0,88	80	0,22	0,29	0,37

Окончание табл. 16

Объем выборки	Уровень значимости			Объем выборки	Уровень значимости		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
15	0,51	0,67	0,85	90	0,21	0,28	0,35
16	0,49	0,65	0,83	100	0,20	0,26	0,33
17	0,48	0,63	0,80	125	0,18	0,24	0,30
18	0,47	0,61	0,78	150	0,17	0,22	0,27
19	0,45	0,60	0,76	175	0,15	0,20	0,25
20	0,44	0,58	0,74	200	0,14	0,19	0,24
22	0,42	0,56	0,71	250	0,13	0,17	0,21
24	0,41	0,53	0,68	500	0,09	0,12	0,15

Таблица 17

Границы критической области для критерия знаков

n	Уровень значимости				*n*	Уровень значимости				*n*	Уровень значимости				*n*	Уровень значимости			
	0,95		0,99			0,95		0,99			0,95		0,99			0,95		0,99	
5	0	5	0	5	29	9	20	8	21	53	19	34	17	36	77	30	47	27	50
6	1	5	0	6	30	10	20	8	22	54	20	34	18	36	78	30	48	28	50
7	1	6	0	7	31	10	21	8	23	55	20	35	18	37	79	31	48	28	51
8	1	7	1	7	32	10	22	9	23	56	21	35	18	38	80	31	49	29	51
9	2	7	1	8	33	11	22	9	24	57	21	36	19	38	81	32	49	29	52
10	2	8	1	9	34	11	23	10	24	58	22	36	19	39	82	32	50	29	53
11	2	9	1	10	35	12	23	10	25	59	22	37	20	39	83	33	50	30	53
12	3	9	2	10	36	12	24	10	26	60	22	38	20	40	84	33	51	30	54
13	3	10	2	11	37	13	24	11	26	61	23	38	21	40	85	33	52	31	54
14	3	11	2	12	38	13	25	11	27	62	23	39	21	41	86	34	52	31	55
15	4	11	3	12	39	13	26	12	27	63	24	39	21	42	87	34	53	32	55
16	4	12	3	13	40	14	26	12	28	64	24	40	22	42	88	35	53	32	56
17	5	12	3	14	41	14	27	12	29	65	25	40	22	43	89	35	54	32	57
18	5	13	4	14	42	15	27	13	29	66	25	41	23	43	90	36	54	33	57
19	5	14	4	15	43	15	28	13	30	67	26	41	23	44	91	36	55	33	58
20	6	14	4	16	44	16	28	14	30	68	26	42	23	45	92	37	55	34	58
21	6	15	5	16	45	16	29	14	31	69	26	43	24	45	93	37	56	34	59
22	6	16	5	17	46	16	30	14	32	70	27	43	24	46	94	38	56	35	59
23	7	16	5	18	47	17	30	15	32	71	27	44	25	46	95	38	57	35	60

Окончание табл. 17

n	Уровень значимости				*n*	Уровень значимости				*n*	Уровень значимостн				*n*	Уровень значимости			
	0,95		0,99			0,95		0,99			0,95		0,99			0,95		0,99	
24	7	17	6	18	48	17	31	15	33	72	28	44	25	47	96	38	58	35	61
25	8	17	6	19	49	18	31	16	33	73	28	45	26	47	97	39	58	36	61
26	8	18	7	19	50	18	32	16	34	74	29	45	26	48	98	39	59	36	62
27	8	19	7	20	51	19	32	16	35	75	29	46	26	49	99	40	59	37	62
28	9	19	7	21	52	19	33	17	35	76	29	47	27	49	100	40	60	37	63

Таблица 18

Критические значения критерия Т Вилкоксона

Объем выборки	Уровень значимости		Объем выборки	Уровень значимости	
	0,95	0,99		0,95	0,99
5	0	–	28	130	101
6	2	–	29	140	110
7	3	0	30	151	120
8	5	1	31	163	130
9	8	3	32	175	140
10	10	5	33	187	151
11	13	7	34	200	162
12	17	9	35	213	173
13	21	12	36	227	185
14	25	15	37	241	198
15	30	19	38	256	211
16	35	23	39	271	224
17	41	27	40	286	238
18	47	32	41	302	252
19	53	37	42	319	266
20	60	43	43	336	281
21	67	49	44	353	296
22	75	55	45	371	312
23	83	62	46	389	328
24	91	69	47	407	345
25	100	76	48	426	362
26	110	84	49	446	379
27	119	92	50	466	397

Таблица 19

Таблицы Фишера,
используемые для одно- и двухфакторного дисперсионного анализа
($\beta_1 = 0,95$)

ν_2	ν_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38
20	4,35	3,49	3,10	287	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,28
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28	2,24
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25	2,20
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16
32	4,15	3,30	2,90	2,67	2,51	2,40	2,32	2,25	2,19	2,14
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,30	2,23	2,17	2,12
36	4,11	3,26	2,86	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,10
38	4,10	3,25	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07

ν_2	ν_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,14	2,09	2,04
48	4,04	3,19	2,80	2,56	2,41	2,30	2,21	2,14	2,08	2,03
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02
55	4,02	3,17	2,78	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,05	2,00
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,02	1,98
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97
80	3,96	3,11	2,72	2,48	2,33	2,21	2,12	2,05	1,99	1,95
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,95	1,90
150	3,91	3,06	2,67	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	2,02	1,95	1,89	1,84
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Лупандин Владимир Иванович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГИИ

Учебное пособие

Издание четвертое, переработанное

Редактор и корректор Н. В. Чапаева
Компьютерная верстка Н. В. Комардиной

Оригинал-макет подготовлен
редакционно-издательским отделом университета

План изданий 2009 г., поз. 75. Подписано в печать 02.12.2009.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 10,8. Усл. печ. л. 11,39. Тираж 500 экз. Заказ 173.

Издательство Уральского университета. 620000, Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

Отпечатано в ИПЦ «Издательство УрГУ». 620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

ISBN 978-5-7996-0481-3

9785799604813